VLADAS VITKUS

JAUNAJAM MATEMATIKUI



VLADAS VITKUS

JAUNAJAM MATEMATIKUI

Uždavinynas V—X klasei



KAUNAS „ŠVIESA" 1994

Lietuvos Respublikos kultūros ir švietimo ministerijos rekomenduota

2-asis perdirbtas leidimas

ISBN 5-430-01586-5

PRATARMĖ

Nuo 1952-ųjų metų Lietuvoje organizuojamos jaunųjų matematikų olimpiados. Daugelis mokytojų joms pradeda rengti mokinius jau penktoje klasėje. Pajėgesni penktokai telkiami į matematikos būrelį, kur jie plečia teorines žinias, mokosi spręsti nestandartinius uždavinius. Man geriausiai sekėsi rengti olimpiadininkus, kai šalia darbo būrelyje ėmiau taikyti naują mokymo būdą, kurį sąlygiškai galima būtų pavadinti susirašinėjimu.

Mokslo metų pradžioje pasiūlau gabesniems mokiniams įsigyti po storą matematikos papildomų darbų sąsiuvinį. Kiekvieno sąsiuvinyje parašau du uždavinius ir paprašau juos išspręsti namie. Atliktą užduotį kruopščiai patikrinu. Jeigu teisingai išspręsta, tame pačiame sąsiuvinyje parašau naują užduotį, jei ne, tai nurodau, kaip ištaisyti klaidą. Jeigu mokinys nepajėgia savarankiškai išspręsti uždavinio, parašau paaiškinimą arba sprendimo planą. O kai kada pats jį išsprendžiu. Tada skiriu dar vieną panašų uždavinį. Ir teisingai atliktas užduotis dažnokai koreguoju pateikdamas racionalesnį sprendimo būdą.

Toks „susirašinėjimas" formuoja mokinių nestandartinių uždavinių sprendimo įgūdžius, ugdo jų savarankiškumą, matematinio rašto kultūrą.

Šiame uždavinyne pateikta 550 uždavinių: 220 — V ir VI klasei, 210 — VII ir VIII klasei ir 120 — IX ir X klasei. Uždavinių sprendimai pateikti tokie, kokių tikimasi iš mokinių.

Antrajame knygos leidime ištaisytos pirmojo klaidos ir netikslumai, pateikti išsamesni, racionalesni uždavinių sprendimai, kai kurie uždaviniai pakeisti naujais, atsisakyta dabar mokykloje nevartojamų matematinių simbolių. Dabartinė uždavinių numeracija mažiau priklauso nuo programos.

Knyga skiriama mokytojams, kurie panorės dirbti su olimpiadininkais pratarmėje aprašytu būdu. Tačiau ja galės sėkmingai pasinaudoti ir kitais metodais rengiantys jaunuosius olimpiadų dalyvius.

Uždavinyno autorius dėkingas antrojo leidimo recenzentams J. Mačiui ir A. Zabulioniui, labai kruopščiai peržiūrėjusiems rankraštį, nurodžiusiems trūkumus, pasiūliusiems racionalesnius sprendimus.

Autorius

UŽDAVINIAI

V—VI KLASĖ

1.1. Berniukas sudėjo turinį, atėminį, skirtumą ir gavo 120. Skirtumas 24 vienetais mažesnis už turinį. Raskite turinį, atėminį ir skirtumą.

1.2. Dviženklio skaičiaus skaitmenų suma lygi didžiausiam vienaženkliam skaičiui, o dešimčių skaitmuo — dviem mažesnis už šią sumą. Koks tas skaičius?

2.1. Dvi draugės norėjo nusipirkti po dėžutę spalvotų pieštukų. Tačiau Daivai trūko 7 ct, o Birutei — 2 ct. Abiejų mergaičių turimų pinigų neužteko net vienai dėžutei nusipirkti. Kiek kainuoja spalvotų pieštukų dėžutė?

2.2. Dviženklio skaičiaus skaitmenų suma lygi mažiausiam dviženkliam skaičiui, o dešimčių skaitmuo — keturis kartus mažesnis už vienetų skaitmenį. Raskite tą skaičių.

3.1. Tėvui tiek metų, kiek sūnui ir dukrai kartu; sūnus dvigubai vyresnis už dukrą ir 20 metų jaunesnis už tėvą. Kiek metų kiekvienam?

3.2. Žvaigždutes pakeiskite skaitmenimis:

$$69* \,|\underline{\;*\;} \atop \;\;\;\;\;\;\;\;*7$$

4.1. Keliais būdais galima sumokėti 78 rublius tik trijų ir penkių rublių banknotais?

4.2. Nubrėžtos dvi tiesės. Vienoje jų yra pažymėti 5 taškai, o kitoje — 3. Iš viso — 7 taškai. Kaip tą galima padaryti?

5.1. Dabar Simui 11 metų, o Vidui vieneri. Kiek metų turės Simas ir kiek Vidas, kai Simas bus trigubai vyresnis už Vidą?

5.2. Pagal kokią taisyklę iš natūraliųjų skaičių eilės galima sudaryti skaičių eilę (seką):

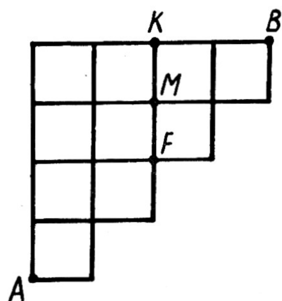
2; 1; 4; 3; 6; 5; 8; 7; 10; 9; 12; 11; . . . ? **(1)**

Kaip iš (1) sekos galima sudaryti tokias sekas:

9; 8; 11; 10; 13; 12; 15; 14; 17; 16; 19; 18; . . . ; (2)

4; 2; 8; 6; 12; 10; 16; 14; 20; 18; 24; 22; . . . ? (3)

6.1. Automobilio vairuotojas nori trumpiausiu keliu nuvažiuoti iš sankryžos A į sankryžą B aplenkdamas sankryžą M (1 pav.). Kiek maršrutų gali pasirinkti automobilio vairuotojas?



1 pav.

6.2. Pagal kokią taisyklę sudaryta ši skaičių seka:

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; ...?

7.1. Reikia pasiųsti du žmones budėti: vieną iš trijų puskarininkių ir vieną iš 6 kareivių. Keliais skirtingais būdais galima sudaryti budėtojų grupę?

7.2. Išsiaiškinkite, pagal kokią taisyklę skaičiai surašyti lentelėje:

34	37	40	43
35	38	41	44
36	39	42	45
37	40	43	46

8.1. Reikia pasiųsti tris žmones budėti: vieną iš penkių karininkų, vieną iš 20 kareivių ir vieną iš 7 puskarininkių. Keliais skirtingais būdais galima sudaryti budėtojų grupę?

8.2. Kaip iš natūraliųjų skaičių eilės sudaryti skaičių seką:
a) 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; ...;
b) 4; 7; 10; 13; 16; 19; 22; ...?

9.1. Vieno mėnesio trys šeštadieniai kalendoriuje pažymėti lyginiais skaičiais. Kuri savaitės diena buvo to mėnesio 25-oji?

9.2. Pagal kokią taisyklę surašyti skaičiai lentelėje? Remdamiesi ja užpildykite tuščius langelius:

17	20	25	
18	19	24	
21	22	23	

10.1. Trys rugsėjo mėnesio sekmadieniai kalendoriuje pažymėti nelyginiais skaičiais. Kuri savaitės diena buvo to mėnesio 20-oji?

10.2. Pagal kokią taisyklę surašyti skaičiai viduriniuose lentelių langeliuose? Užpildykite tuščią langelį:

84	19	16

53	11	21

41		37

11.1. Kada mėnuo turi 5 sekmadienius?

11.2. Į kiek dalių galima padalyti plokštumą keturiomis skirtingomis tiesėmis? Kiekvieną atsakymo atvejį pateikite brėžiniu.

12.1. Dėžėje yra raudonų, mėlynų, žalių ir geltonų rutuliukų. Iš viso 27. Raudonų rutuliukų du kartus daugiau negu mėlynų, mėlynų — du kartus daugiau negu žalių, o geltonų rutuliukų daugiau kaip 7. Kiek kiekvienos spalvos rutuliukų yra dėžėje?

12.2. Iš degtukų sudaryta klaidinga lygybė (2 pav.). Kaip turime perdėti vieną degtuką, kad gautume teisingą lygybę?

2 pav.

13.1. Dėžutėje yra 7 raudoni ir 5 mėlyni pieštukai. Kiek mažiausiai pieštukų tamsoje reikia paimti, kad iš jų būtų ne mažiau kaip du raudoni ir ne mažiau kaip trys mėlyni?

13.2. Iš degtukų sudaryta klaidinga lygybė (3 pav.). Kaip turime perdėti vieną degtuką, kad gautume teisingą lygybę?

3 pav.

14.1. Tamsiame sandėlyje padėta 10 porų juodų ir 10 porų rudų vieno dydžio batų, nesurištų poromis. Tamsoje negalima atskirti ne tik batų spalvos, bet ir kairiojo nuo dešiniojo. Kiek mažiausiai batų reikia paimti, kad iš jų būtų nors viena pora (tos pačios spalvos kairysis ir dešinysis batas)?

14.2. Pagal kokią taisyklę surašyti skaičiai? Vietoj žvaigždutės parašykite reikiamą skaičių:
5; 14; 41; 122; *; 1094.

15.1. Dviejose autokolonose važiuoja po 28 automobilius. Iš viso 11 „Žigulių“, o kiti — „Moskvičiai“. Pirmoje autokolonoje kiekvieniems „Žiguliams“ tenka „Moskvičių“ du kartus mažiau negu antroje. Kiek „Moskvičių“ važiuoja kiekvienoje autokolonoje?

15.2. Tarp kai kurių užrašo 6 6 6 6 6 6 6 6 skaitmenų parašykite sudėties ženklą, kad gautute reiškinį, kurio reikšmė lygi 264.

16.1. Kaip pasemti 4 litrus vandens turint tik du indus: 3 ir 5 litrų?

16.2. Tarp kai kurių užrašo 5 5 5 . . . 5 5 (dvidešimt penketų) skaitmenų parašykite sudėties ženklą, kad gautute reiškinį, kurio reikšmė lygi 1000.

17.1. Turime 12 kibirų statinę, pilną žibalo, ir dvi tuščias statines: 5 ir 8 kibirų talpos. Kaip pusę žibalo perpilti į 8 kibirų talpos statinę?

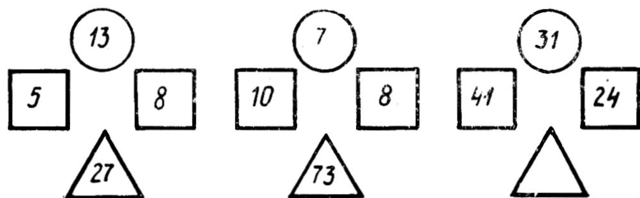
17.2. Berniukas nori nusipirkti knygutę už 17 kapeikų. Jis turi tik trijų kapeikų vertės monetų, o kasininkė — tik penkių kapeikų vertės monetų. Kiek mažiausiai monetų berniukas turi duoti kasininkei ir kiek jų gauti grąžos, jeigu abu tokių monetų turi užtektinai?

18.1. Studentas per 5 mokymosi metus išlaikė 31 egzaminą, kiekviename aukštesniame kurse laikydamas jų vis daugiau. Penktame kurse egzaminų buvo tris kartus daugiau negu pirmame. Kiek egzaminų studentas išlaikė ketvirtame kurse?

18.2. Kaip galima visų natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 20 sumą suskirstyti į penkias lygias sumas su vienodu dėmenų skaičiumi? Pateikite pavyzdį.

19.1. Šaškė yra šachmatų lentos kairiajame apatiniame laukelyje („didžiojo kelio" pirmajame). Keliais skirtingais būdais ji gali pasidaryti dama? Nevienodais laikomi būdai, kurie skiriasi nors vienu ėjimu.

19.2. Pagal kokią taisyklę surašyti skaičiai trikampiuose? Remdamiesi ja parašykite skaičių tuščiame trikampyje (4 pav.).



4 pav.

20.1. Grupė mokinių turėjo iškasti duobes obelaitėms sodinti. Jeigu kiekvienas mokinys iš sandėlio pasiimtų po kastuvą, tai dviem mokiniams jų trūktų. Jeigu kiekvienas pasiimtų po laužtuvą, tai vienam mokiniui neužtektų. Jeigu kiekvienas mokinys pasiimtų arba laužtuvą, arba kastuvą, tai 3 įrankiai liktų sandėlyje. Kiek mokinių grupėje? Kiek kastuvų ir kiek laužtuvų yra sandėlyje?

20.2. Skaičius baigiasi skaitmeniu 9. Jeigu šį skaitmenį nubrauktume ir prie gauto skaičiaus pridėtume pradinį skaičių, tai gautume 306 216. Raskite tą skaičių.

21.1. Sauliaus, Vyto ir Lino pavardės Kalvaitis, Jonaitis, Petraitis. Linas, Vytas ir Jonaitis domisi matematika, o Vytas ir Petraitis — muzika. Kokia kiekvieno berniuko pavardė?

21.2. Devyni skaičiai surašyti trijų eilučių ir trijų stulpelių lentelėje. Sudėjęs pirmosios eilutės skaičius, mokinys gavo 818, antrosios — 819, o trečiosios — 917. Sudėjęs stulpelių skaičius, jis gavo: 185, 722 ir 648. Ar teisingai mokinys apskaičiavo?

22.1. Turime 10 g masės plokštelę. Kaip supjaustyti ją į tris dalis, kad kiekvienos masė būtų sveikas gramų skaičius ir atstotų svarelius, kuriais galima pasverti nuo 1 g iki 10 g masės daiktus?
22.2. Raskite dviženklį natūralųjį skaičių, septynis kartus didesnį už jo vienetų skaitmenį.

23.1. Dėl futbolo taurės kovojama taip: pralaimėjusi komanda iškrinta iš varžybų, lygiųjų atveju komandos rungtynes peržaidžia. Iš viso sužaista m rungtynių, n jų komandos peržaidė. Kiek komandų dalyvavo taurės varžybose?
23.2. Aplink kvadratinę aikštelę kas du metrai įkasti stulpeliai (keturi iš jų — kvadrato viršūnėse). Palei vieną kraštinę įkastas 21 stulpelis. Koks aikštelės perimetras? Kiek stulpelių įkasta aplink visą aikštelę?

24.1. Sporto varžybos vyksta turais. Už pergalę viename ture komanda gauna 3 taškus, už lygiąsias — 2 taškus, už pralaimėjimą — 1 tašką. Ar galėjo būti tokie dviejų komandų varžybų rezultatai: 23 : 20, 17 : 17, 24 : 16, 17 : 15?
24.2. Vienodos raidės žymi tą patį skaitmenį. Iššifruokite sudėtį:

$$\begin{array}{r} B \\ AAAA \\ +AAAA \\ AAAA \\ \hline BAAAA \end{array}$$

25.1. 20 m ilgio traukinys pro telefono stulpą pravažiuoja per 2 s. Per kiek laiko jis pervažiuos 40 m ilgio tiltą?
25.2. Atspėkite šių lygčių sprendinius:

a) $111=x+x+x$;
b) $3y=y\cdot y$;
c) $28+a=2a+28$.

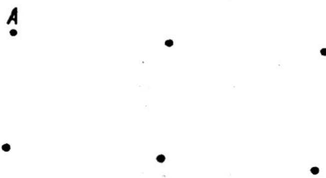
26.1. Moteris atsinešė į turgų pintinę obuolių. Pirmajam pirkėjui ji pardavė pusę visų obuolių ir dar pusę obuolio, antrajam — pusę likusių obuolių ir dar pusę obuolio, ir taip toliau iki šeštojo, kuris, pirkdamas pusę likusių obuolių ir dar pusę obuolio, paėmė paskutinius obuolius. Kiek obuolių moteris atsinešė į turgų?
26.2. Kuriuo skaitmeniu baigiasi sandauga 21 dauginamojo, kurių kiekvienas lygus 3?

27.1. Varinės monetos buvo 1, 2, 3 ir 5 kapeikų vertės. Mergaitė turi 21 varinę monetą. Ar gali atsitikti, kad ji neturi bent 7 vienodos vertės monetų?
27.2. Parašyti natūralieji skaičiai iš eilės nuo 1 iki 30: 123456789101112...2930.
Kiek skaitmenų turi skaičius? Kuris skaitmuo yra šio skaičiaus 16-oje vietoje? 21-oje vietoje?

28.1. Marytė turi 25 monetas: 10 ct, 20 ct ir 50 ct vertės. Ar gali ji neturėti bent 9 vienodos vertės monetų?
28.2. Nubraižykite du kampus, kurių bendra dalis būtų: a) keturkampis; b) trikampis; c) atkarpa; d) spindulys; e) taškas.

29.1. Turime 4 pagaliukus 1 cm, 4 pagaliukus 2 cm, 7 pagaliukus 3 cm, 5 pagaliukus 4 cm ilgio. Iš šių pagaliukų sudarykite didžiausią kvadratą.
29.2. Turime pakankamai skirtingos vertės (1, 2, 3, 5 kp) varinių monetų. Parašykite visas sumas, kurias galima gauti sudėjus trijų monetų vertes.

30.1. Sūnus paklausė tėvą, kiek jam metų. Tėvas atsakė: „Jei prie pusės mano metų pridėtum 12, tai sužinotum, kiek metų aš turėjau prieš 12 metų“. Kiek metų tėvui?
30.2. Šeši plokštumos taškai išdėstyti stačiakampiu (5 pav.). Kiek galima nubraižyti trikampių, kurių viena viršūnė būtų taške A, o kitos dvi — bet kuriuose pažymėtuose taškuose?



5 pav.

31.1. Aikštelėje stovi motociklai (trys iš jų su vienratėmis priekabomis) ir lengvieji automobiliai, iš viso 27 transporto priemonės. Visos jos turi 85 ratus. Kiek lengvųjų automobilių ir kiek motociklų stovi aikštelėje?
31.2. Dviženklio skaičiaus dešimčių skaitmuo tris kartus didesnis už vienetų skaitmenį. Jei tuos skaitmenis sukeistume vietomis, tai gautume skaičių, 36 vienetais mažesnį už duotąjį. Raskite tą skaičių.

32.1. Keli šaukštai kainuoja 2 Lt, o tiek pat šakučių — 1 Lt 76 ct. Šaukšto kaina mažesnė negu 50 ct. Kiek kainuoja 5 šaukštai? (Kainos išreikštos sveikuoju centų skaičiumi.)
32.2. Virginijus sugalvojo dviženklį skaičių, kurio dešimčių skaitmuo 2 kartus mažesnis už vienetų skaitmenį. Skaičius, parašytas

tais pačiais skaitmenimis, bet atvirkščia tvarka, yra 36 vienetais didesnis už sugalvotąjį. Kokį skaičių sugalvojo Virginijus?

33.1. Valstietis atvežė į turgų daugiau kaip 300, bet mažiau kaip 400 agurkų. Kai juos skaičiavo dešimtimis, tai iki pilno dešimčių skaičiaus trūko dviejų agurkų. Kai skaičiavo tuzinais, tai liko 8 agurkai. Kiek agurkų atvežė valstietis?
33.2. Berniuko kišenėje buvo 20 monetų po 1 ir 5 centus. Suskaičiavęs jis pasakė, kad turi iš viso 47 ct. Įrodykite, kad berniukas suklydo skaičiuodamas.

34.1. Prie skaičiaus 15 iš kairės ir iš dešinės parašykite po tokį skaitmenį, kad gautas keturženklis skaičius dalytųsi iš 15.
34.2. Trys žvejai nutarė kartu papietauti. Vienas jų pietums davė 3 žuvis, kitas — 5 tokias pat žuvis, o trečias — 80 ct. Kaip pirmas ir antras žvejys turi pasidalyti gautus pinigus?

35.1. Dviejų skaičių suma lygi 180. Padalijus didesnį skaičių iš mažesniojo, gaunamas dalmuo 5. Raskite tuos skaičius.
35.2. Įrodykite, kad iš kiekvienų 11 skaičių yra du skaičiai, kurių skirtumas dalijasi iš 10.

36.1. Berniukas turi tiek seserų, kiek ir brolių, o jo sesuo — du kartus mažiau seserų negu brolių. Kiek šeimoje brolių ir kiek seserų?
36.2. Daiva surašė skaičius nuo 1 iki 252, po to išbraukė visus skaičius, kurie dalijasi iš 2, bet nesidalija iš 5, ir visus skaičius, kurie dalijasi iš 5, bet nesidalija iš 2. Kiek skaičių liko?

37.1. Kazys ir Petras pirko vienodas slides. Petras už slides sumokėjo trijų rublių vertės banknotais, o Kazys — penkių rublių banknotais. Abu kartu padavė kasininkei mažiau negu 10 banknotų. Kiek kainuoja slidžių pora?
37.2. Parašykite mažiausią sveikąjį skaičių, kuris būtų sudarytas iš visų skaitmenų ir dalytųsi: a) iš 5; b) iš 20.

38.1. Tėvas vyresnis už sūnų 4 kartus, o abu jie turi 50 metų. Po kelerių metų tėvas bus 3 kartus vyresnis už sūnų?
38.2. Vienodos raidės žymi tą patį skaitmenį. Iššifruokite daugybą: $\overline{AB} \cdot A = \overline{CCC}$.

39.1. Tėvas vyresnis už sūnų 4 kartus. Po 20 metų jis bus 2 kartus vyresnis už sūnų. Kiek metų tėvui dabar?
39.2. Padalijus skaičių iš 53, gaunama liekana 48. Nubraukus du paskutinius dalinio skaitmenis, gaunamas skaičius, kuris dalijasi iš 53 be liekanos. Kurie skaitmenys nubraukiami?

40.1. Dviejuose pakeliuose yra iš viso 30 sąsiuvinių. Jei iš pirmo pakelio perdėtume į antrąjį 2 sąsiuvinius, tai pirmame pakelyje būtų 2 kartus daugiau sąsiuvinių negu antrajame. Kiek sąsiuvinių yra kiekviename pakelyje?

40.2. Vietoj žvaigždučių parašykite tokius skaitmenis, kad gautute teisingą lygybę (skaičiai negali prasidėti nuliu):

a) $*****-****=1$;

b) $***+***=1997$.

41.1. Dviejose svarstyklių lėkštelėse padėti 24 svarsčiai. Vienoje lėkštelėje visi svarsčiai po 5 kg, o kitoje — po 3 kg. Svarstyklės pusiausviros. Kiek svarsčių kiekvienoje lėkštelėje?

41.2. Ar užteks 1 mm^3 tūrio kubelių, esančių 1 m^3, 300 km bokštui pastatyti?

42.1. Vladas sąsiuvinyje parašė du skaičius, po to — trečią skaičių, lygų pirmųjų dviejų sumai, tada ketvirtą, lygų trečiojo ir antrojo sumai ir t. t. Stasiui jis pasakė šios sekos šešių iš eilės parašytų skaičių sumą. Sužinojęs ją, Stasys tuoj pat pasakė penktąjį tų šešių skaičių. Paaiškinkite, kaip jis galėjo skaičiuoti.

42.2. Parašykite vienus skliaustus taip, kad reiškinio $4\cdot12+18:6+3$ reikšmė būtų:

a) lygi 50; b) didžiausia.

43.1. Futbolo komandos (11 žaidėjų) amžiaus vidurkis 22 metai. Per rungtynes vienas futbolininkas susižeidė ir išėjo iš aikštės. Likusių aikštėje 10 žaidėjų amžiaus vidurkis pasidarė 21 metai. Kiek metų išėjusiam iš aikštės futbolininkui?

43.2. Arvydas sugalvojo skaičių. Prie jo pridėjo 5. Sumą padalijo iš 3, padaugino iš 4, atėmė 6, padalijo iš 7 ir gavo skaičių 2. Kokį skaičių sugalvojo Arvydas?

44.1. Sugalvokite uždavinį, kurį būtų galima išspręsti sudarius lygtį $4(x-5)=3x-2$. Išspręskite jį.

44.2. Raskite skaičių, kurį padauginę iš 186, o sandaugą sumažinę 5 kartus gautute skaičių, 1991 vienetu didesnį už ieškomąjį.

45.1. Keturiuose maišeliuose buvo vienodas skaičius saldainių. Kai iš kiekvieno maišelio Birutė išėmė po 9 saldainius, tai visuose kartu liko tiek, kiek iš pradžių buvo viename maišelyje. Po kiek saldainių iš pradžių buvo maišeliuose?

45.2. Sugalvotą skaičių aš sumažinau 7 vienetais, po to sumažinau 10 kartų ir gavau skaičių, 34 vienetais mažesnį už sugalvotąjį. Kokį skaičių aš sugalvojau?

46.1. Parašyti šeši skaičiai, kurių kiekvienas, pradedant antruoju, 0,4 didesnis už prieš jį esantį. Jų aritmetinis vidurkis lygus 3. Raskite tuos skaičius.

46.2. Lentpjūvėje yra 6 m ir 7 m ilgio rąstų. O mums reikia 42 vieno metro ilgio rąstelių. Kuriuos rąstus tektų pjaustyti, kad mažiau būtų pjūvių?

47.1. Parašyti septyni skaičiai, kurių kiekvienas, pradedant antruoju, 0,2 mažesnis už prieš jį esantį. Jų aritmetinis vidurkis lygus 6,6. Raskite tuos skaičius.

47.2. Išspręskite lygtis:

a) $3x+5=5x-3$;
b) $5a-7=3a-1$;
c) $4(y+2)=3(3y-4)$.

48.1. Turime 8 kg cukraus ir lėkštines svarstykles be svarsčių. Kaip jomis atsverti 3 kg cukraus?

48.2. Apskaičiuokite sumą
$1+2+3+4+\ldots+48+49+50$.

49.1. Pilna statinė vandens sveria 60 kg. Ta pati statinė, pripilta vandens iki pusės, sveria 35 kg. Kiek sveria statinė? Kiek sveria statinėje telpantis vanduo?

49.2. Apskaičiuokite reiškinio
$99{,}9-99{,}8+99{,}7-99{,}6+99{,}5-99{,}4+\ldots+50{,}3-50{,}2+50{,}1-50$
reikšmę.

50.1. Pilna statinė vandens sveria 50 kg. Ta pati statinė, kai jos ketvirtadalį užima vanduo, sveria 20 kg. Kiek sveria statinė ir kiek sveria statinėje telpantis vanduo?

50.2. Apskaičiuokite reiškinio
$3{,}4m+12{,}1+2{,}8p+3{,}7m+2{,}1+4{,}3p$
reikšmę, kai $m+p+2=10$.

51.1. 0,5 kg svogūnų, 3 kg bulvių ir 1 kg agurkų kartu kainuoja 2,38 Lt, o 2 kg svogūnų ir 4 kg agurkų — 8,20 Lt. Kiek kainuoja 1 kg svogūnų, 2 kg bulvių ir 2 kg agurkų?

51.2. Parašykite veiksmo ženklą, o vietoj žvaigždučių — skaitmenis (paaiškinkite):

```
  1 2 3, * 7 *
  3 4 8, 2 * 4
  2 * 9, 7 4 8
  ------------
  * 3 *, 4 9 7
```

52.1. Dviejų sveikųjų skaičių aritmetinis vidurkis lygus 159,5. Vienas jų baigiasi nuliu. Nubraukus nulį gaunamas antras skaičius. Raskite tuos skaičius.

52.2. Parašykite veiksmo ženklą, o vietoj žvaigždučių — skaitmenis (paaiškinkite):

$$\begin{array}{r} 3\,*\,5,\,6\,7\,* \\ 2\,0\,*,\,*\,*\,9 \\ \hline 9\,6,\,8\,8\,9 \end{array}$$

53.1. Aš važiuoju traukiniu, kurio greitis 40 km/h. Pro mano vagono langą per 3 s priešinga kryptimi pravažiuoja 96 m ilgio greitasis traukinys. Kokiu greičiu važiavo greitasis traukinys?

53.2. Žvaigždutes pakeiskite skaitmenimis ir parašykite veiksmo ženklą (paaiškinkite):

$$\begin{array}{r} *\,*\,*\,*\,* \\ 3\,4\,* \\ \hline *\,*\,*\,*\,* \\ *\,*\,*\,*\,*\,* \\ 2\,3\,5\,0\,3\,8 \\ \hline *\,*\,*\,*\,*\,*\,*\,6 \end{array}$$

54.1. Iš miesto *A* į miestą *B* atvyko du vaikinai. Vienas jų 4 h važiavo dviračiu 15 km/h greičiu ir 6 h — automobiliu. Antrasis 3 h keliavo traukiniu ir 1,2 h — automobiliu. (Abiejų automobilių greitis vienodas.) Automobiliai važiavo perpus lėčiau už traukinį. Koks atstumas tarp miestų *A* ir *B*?

54.2 Išspręskite lygtį

$(x\cdot 100-0{,}7357):0{,}01-15{,}88=0{,}55.$

55.1. Trys draugai išvyko į turistinę kelionę. Pirmasis važiavo autobusu 60 km/h greičiu, antrasis — traukiniu 25 m/s greičiu, o trečiasis skrido lėktuvu. Kokiu greičiu skrido lėktuvas, jeigu autobuso ir traukinio greičių suma sudaro $\frac{3}{8}$ lėktuvo greičio?

55.2. Išspręskite lygtį

$\left(\left(\frac{30{,}01-x:9}{7}+97{,}785\right)\cdot 8-488{,}84\right):7=45{,}6.$

56.1. Prie bendro stalo sėdintiems vaikams reikia išdalyti 10 saldainių taip, kad kiekviena mergaitė gautų 2 kartus daugiau saldainių negu kiekvienas berniukas. Kiek berniukų ir kiek mergaičių gali sėdėti prie bendro stalo?

56.2. Lygybėje vietoj žvaigždučių parašykite skaitmenis (paaiškinkite):

$$**\cdot * = 1 + * \,.$$

57.1. Berniukas nutarė eiti vienodo ilgio žingsniais taip: 3 žingsnius pirmyn, 2 žingsnius atgal, 3 žingsnius pirmyn, 2 žingsnius atgal ir t. t. Kiek žingsnių berniukas pajudėtų į priekį, jei iš viso nužengtų 238 žingsnius?

57.2. Iš 9 vienodų žiedų vienas šiek tiek lengvesnis už kitus. Kaip, du kartus sveriant su lėkštinėmis svarstyklėmis be svarsčių, nustatyti lengvesnį žiedą?

58.1. Gediminas dalyvauja varžybose, kurių taisyklės tokios: 5 žingsneliai pirmyn, 3 žingsneliai atgal, 5 žingsneliai pirmyn, 3 žingsneliai atgal ir t. t. (Visi žingsneliai vienodo ilgio.) Kuriuo atveju jis pajudės toliau į priekį: ar žengęs iš viso 1990 žingsnelių, ar 1992 žingsnelius?

58.2. Iš 26 monetų viena yra netikra, truputį sunkesnė už kitas. Kaip nustatyti netikrą monetą tris kartus sveriant lėkštinėmis svarstyklėmis be svarsčių?

59.1. Per 5 h raitelis nujojo 8 km mažiau negu pusė viso kelio, o per 7 h — 16 km daugiau negu pusė viso kelio. Kokio ilgio visas kelias?

59.2. Tarp 15 iš pažiūros vienodų monetų viena yra netikra (ji šiek tiek skiriasi iš kitų savo mase). Kaip nustatyti, ar ji sunkesnė, ar lengvesnė už kitas? Leidžiama sverti lėkštinėmis svarstyklėmis be svarsčių ne daugiau kaip du kartus.

60.1. Dviejuose maišeliuose yra 12 obuolių. Jeigu $\frac{1}{4}$ pirmame maišelyje esančių obuolių perdėtume į antrą, tai abiejuose maišeliuose jų būtų po lygiai. Kiek obuolių yra kiekviename maišelyje?

60.2. Statinėje yra ne mažiau kaip 10 l benzino. Kaip pasemti iš jos 6 l benzino turint 9 l talpos kibirą ir 5 l bidoną?

61.1. Aš sugalvojau skaičių. Jeigu jį padidinčiau 2,5 karto, prie gauto rezultato pridėčiau 1,75 ir sumą padalyčiau iš 0,8, tai gaučiau 37,5. Kokį skaičių aš sugalvojau?

61.2. Kuriuos skaitmenis reikia parašyti vietoj raidžių A, B, C, kad būtų teisinga lygybė $AA+AB=CCC$? (Vienodos raidės žymi tą patį skaitmenį.)

62.1. Kubui, kurio briaunos ilgis 2 cm, nudažyti reikia 1 g dažų. Kiek reikės dažų nudažyti kubui, kurio briauna 6 cm?

62.2. Išbraukite skaičiaus 1234567891011121314151 6...5960 šimtą skaitmenų, kad gautute mažiausią skaičių. (Gauto skaičiaus pradžioje gali būti ir nulių.)

63.1. Stačiakampė šokolado plytelė susideda iš 5×8 lygių dalių, kurias skiria tiesūs grioveliai. Ji sulaužyta į 40 vienodų dalių. Kiek kartų teko laužti?

63.2. Parašyta vienas nuo kito neatskirtų natūraliųjų skaičių eilė 1 2 3 4 . . . . Kuris skaitmuo yra 1001-oje vietoje?

64.1. Varinio kubo briauna 0,5 cm, masė 1,1 g. Kokia masė varinio kubo, kurio briauna 800 mm? (Atsakymą pateikite 0,1 t tikslumu.)

64.2. Žiogas gali šokinėti tiese ir dideliais, ir mažais šuoliukais. Didelis šuoliukas 12 cm ilgio, o mažas — 7 cm. Kaip jis gali patekti iš taško O į tašką A, tarp kurių atstumas 3 cm?

65.1. Iš prieplaukos upe tuo pačiu metu priešingomis kryptimis išplaukia motorinė valtis ir sielis. Motorinės valties greitis stovinčiame vandenyje 25,4 km/h. Po kiek valandų atstumas tarp jų bus lygus 38,1 km?

65.2. Po 5 minutinės rodyklės apsisukimų bokšto laikrodis rodys 14 valandą. Kurią valandą rodys laikrodis, kai minutinė rodyklė bus apsisukus 1991 kartą?

66.1. Klasėje yra 16 berniukų ir kelios mergaitės. Kiekvienas mokinys mokosi arba gerai, arba patenkinamai. Gerai besimokančių mergaičių yra tiek, kiek patenkinamai besimokančių berniukų. Kiek klasės mokinių mokosi gerai?

66.2. Ant stalo padėti 25 degtukai. Juos paeiliui ima du berniukai. Vienu kartu galima paimti ne daugiau kaip 3 degtukus. Laimi tas, kuris paskutinis paima nuo stalo degtukus. Įrodykite, kad pradedantysis visada gali laimėti.

67.1. Paskutinis knygos puslapis pažymėtas skaičiumi 710. Kiek reikėjo skaitmenų visiems jos puslapiams sunumeruoti? (Numeracija pradedama nuo 1.)

67.2. Vienas mokinys pasako vienaženklį natūralųjį skaičių, kitas prideda prie jo kurį nors vienaženklį natūralųjį skaičių ir pasako sumą; prie sumos pirmasis vėl prideda kurį nors vienaženklį natūralųjį skaičių ir vėl pasako sumą ir t. t. Laimi tas, kuris pirmas pasako 66. Kaip reikia žaisti norint laimėti? Katras laimi teisingai žaisdamas: pradedantysis ar jo partneris?

68.1. Žodyno puslapiai sunumeruoti 6869 skaitmenimis. Kiek puslapių turi žodynas? (Numeracija pradedama nuo 1.)

68.2. Klasėje 37 mokiniai. (Nė vienas klasės mokinys nėra gimęs vasario 29 dieną.) Įrodykite, kad kasmet bent vieną mėnesį yra ne mažiau kaip keturios jų gimimo dienos.

69.1. Triženklio ir lyginio dviženklio skaičiaus skirtumas lygus 3. Raskite tuos skaičius.
69.2. Keturi berniukai — Algis, Benas, Jonas, Giedrius — bėgimo varžybose užėmė keturias pirmąsias skirtingas vietas. Po varžybų Algis pasakė: „Aš nebuvau nei pirmas, nei paskutinis"; Benas — „Aš nebuvau paskutinis"; Jonas — „Aš buvau pirmas"; Giedrius — „Aš buvau paskutinis". Trys atsakymai teisingi, vienas melagingas. Kieno atsakymas melagingas? Kas buvo pirmas?

70.1. Baseino plotas 1 ha, o dugnas horizontalus. Jame yra milijonas litrų vandens. Ar galima šiame baseine plaukti?
70.2. Raskite nelygybės sveikuosius sprendinius:
a) $|x| \leqslant 5,2$;
b) $3 \leqslant |x| < 8$;
c) $|x+2| > 3$.

71.1. Iš dviejų vietovių, tarp kurių atstumas 63 km, tuo pačiu metu vienas priešais kitą išėjo du turistai. Jie susitiko po 9 h. Jei pirmasis būtų ėjęs 1,5 karto greičiau, o antrasis — 2 kartus greičiau, jie būtų susitikę po 5 h 15 min. Raskite kiekvieno turisto greitį.
71.2. Raskite lygties sprendinius:
a) $|2x-1| = -5$;
b) $|2x-1| = 5$.

72.1. Kiek daliklių turi skaičius 864? Parašykite juos.
72.2. Padalijus skaičių iš 84, gaunama liekana 56. Ar dalijasi tas skaičius iš 28?

73.1. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių, turintį 12 skirtingų daliklių.
73.2. Šešiaženklio skaičiaus pirmasis iš kairės skaitmuo yra 5. Šį skaitmenį perkėlę į skaičiaus galą, gautume skaičių, keturis kartus mažesnį už pradinį. Raskite pradinį skaičių.

74.1. Kuris triženklis skaičius turi daugiausia daliklių?
74.2. Piniginėje yra dešimt monetų po 2 ir 5 centus, iš viso 26 ct. Kiek vienų ir kiek kitų monetų yra piniginėje?

75.1. Grupė studentų (daugiau negu 1) nutarė nusipirkti magnetofoną, bet jiems trūko 20 Lt. Kai visi susidėjo po vienodą sveikąjį skaičių litų, dar trūko 3 Lt. Kiek buvo studentų?
75.2. Kas didesnis ir kiek: trigubas skaičių a ir x kvadratų skirtumas ar dvigubas tų skaičių kvadratų skirtumas, kai $a=-10$, $x=-99$?

76.1. Dabar 2 valanda nakties. Kurią valandą rodys laikrodis po 75 h?
76.2. Kas didesnis ir kiek: skaičių a ir x kubų sumos pusė ar tų pačių skaičių sumos pusės kubas, kai $a=-18$, $x=-11$?

77.1. Motinai 34 metai, jos sūnui 12, o dukrai 10 metų. Po kiek metų sūnaus ir dukros amžiaus suma bus lygi motinos amžiui?
77.2. Įrodykite, kad dviejų iš eilės einančių nelyginių skaičių didžiausias bendrasis daliklis lygus 1.

78.1. Trys broliai pasidalijo loterijoje laimėtus pinigus šitaip: vyriausias gavo 0,3 visos sumos ir dar 8 Lt, vidurinis — 0,4 likusios sumos ir dar 16 Lt, jauniausiasis — 0,7 naujo likučio ir dar 24 Lt. Kokia pinigų suma buvo laimėta ir kiek litų gavo kiekvienas brolis?
78.2. Kuriuo skaitmeniu baigiasi reiškinio $14^{23}+23^{23}+70^{23}$ reikšmė?
79.1. Miške grybavo nevienodo amžiaus mergaitės. Surinktus grybus jos pasidalijo taip: jauniausia gavo 20 grybų ir dar 0,04 likusių, vyresnė už ją — 21 grybą ir 0,04 naujo likučio, trečia — 22 grybus ir 0,04 po to likusių ir t. t. Visos mergaitės gavo grybų po lygiai. Kiek grybų buvo surinkta ir kiek mergaičių grybavo?
79.2. Su kokiomis x reikšmėmis $x^2>x^3$?

80.1. Keturių iš eilės einančių lyginių skaičių suma 420. Raskite tuos skaičius.
80.2. Įrodykite, kad $3^{43}-7^{17}$ dalijasi iš 10 be liekanos.

81.1. Jeigu iš pirmos lentynos perdėtume 15 knygų į antrąją, tai abiejose lentynose jų būtų po lygiai. Jei iš antros lentynos perdėtume 15 knygų į pirmąją, tai pirmoje jų būtų 3 kartus daugiau negu antroje. Kiek knygų yra kiekvienoje lentynoje?
81.2. Įrodykite, kad su kiekvienu natūraliuoju n reiškinio $\frac{10^n+2}{3}$ reikšmė yra sveikasis skaičius.

82.1. Pirkta obuolių: vieno kilogramo kaina 1 Lt 20 ct, kitų — 80 ct. Už brangesnius obuolius sumokėta tiek pat, kiek už pigesnius. Raskite vidutinę 1 kg pirktų obuolių kainą.
82.2. Įrodykite, kad skaičius $7^{777}+1$ nesidalija iš 5.

83.1. Įrodykite, kad dviejų triženklių natūraliųjų skaičių, parašytų tais pačiais skaitmenimis, bet atvirkščia tvarka, skirtumas dalijasi iš 9 ir iš 11.

83.2. Raskite kiekvienos šių skaičių poros didžiausią bendrąjį daliklį: 720 ir 96; 728 ir 280; 432 ir 1025.

84.1. Iš keturženklio skaičiaus (kurio vienetų skaitmuo nelygus 0) atimtas skaičius, parašytas tais pačiais skaitmenimis, bet atvirkščia tvarka. Raskite didžiausią jų skirtumą.
84.2. Pintinėje yra mažiau kaip 40 kiaušinių. Skaičiuojant juos poromis, lieka 1 kiaušinis; skaičiuojant trejetais arba penketais, vis tiek lieka 1 kiaušinis. Kiek kiaušinių pintinėje?

85.1. Keliais būdais iš 7 cm ir 12 cm atkarpų galima sudėti 1 m ilgio atkarpą? (Į atkarpų dėjimo tvarką neatsižvelgiama.)
85.2. 7 pieštukai brangesni už 8 sąsiuvinius. Kas brangiau: 8 pieštukai ar 9 sąsiuviniai?

86.1. Iš vienetinių kvadratų sudaryti skirtingi (nelygūs) stačiakampiai. Kiekvienam stačiakampiui leidžiama panaudoti ne daugiau kaip 9 tokius kvadratus. Apskaičiuokite visų tokių stačiakampių plotų sumą.
86.2. Kiek keturženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, kai skaitmenys 2 ir 4 negali būti greta?

87.1. Šachmatų turnyre dalyvavo 6 šachmatininkai. Kiekvienas jų sužaidė su kitais po vieną partiją. Kiek iš viso partijų sužaista?
87.2. Padaliję 458 ir 259 iš to paties skaičiaus, gauname liekanas 3 ir 4. Raskite daliklį.

88.1. Šachmatų olimpiadoje dalyvavo 15 komandų po 4 šachmatininkus. Kiekviena komanda sužaidė su visomis kitomis po 4 partijas. Kiek iš viso partijų sužaista olimpiadoje?
88.2. Apskaičiuokite:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{98\cdot 99}+\frac{1}{99\cdot 100}.$$

89.1. Plokštumoje pažymėta n taškų, iš kurių jokie trys nepriklauso vienai tiesei. Per kiekvienus du pažymėtus taškus nubrėžta tiesė. Kiek tiesių nubrėžta?
89.2. Apskaičiuokite:

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\ldots+\frac{1}{342}+\frac{1}{380}.$$

90.1. Trijuose bakuose buvo 50 l benzino. Pirmame — 10 l daugiau negu antrame. Iš pirmo bako perpylus 26 l į trečiąjį, antrame ir trečiame bake benzino pasidarė po lygiai. Kiek litrų benzino iš pradžių buvo pirmame bake?

90.2. Apskaičiuokite:

$$\frac{4}{5\cdot 7}+\frac{4}{7\cdot 9}+\frac{4}{9\cdot 11}+\frac{4}{11\cdot 13}+\ldots+\frac{4}{59\cdot 61}.$$

91.1. Plokštumoje pažymėti 9 taškai ($A, \ldots$). Jie sudaro kvadratą 3×3. Kiek egzistuoja trikampių, kurių viena viršūnė yra taške A, o kitos dvi — bet kuriuose kituose pažymėtuose taškuose?

91.2. Išspręskite lygtį

$$\left(\frac{7}{2\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\frac{7}{16\cdot 23}+\frac{7}{23\cdot 30}+\frac{7}{30\cdot 37}+\frac{7}{37\cdot 44}+\frac{7}{44\cdot 51}+\frac{7}{51\cdot 58}\right)x=14.$$

92.1. Iš 22 degtukų sudarykite didžiausio ploto stačiakampį.

92.2. Apskaičiuokite:

$$333\cdot\left(\frac{71}{111\,111}+\frac{573}{222\,222}-\frac{2}{3\cdot 7\cdot 37}\right).$$

93.1. Turime 4 pagaliukus 1 cm, 4 pagaliukus 2 cm, 7 pagaliukus 3 cm, 5 pagaliukus 4 cm ilgio. Ar galima iš visų šių pagaliukų sudaryti stačiakampį?

93.2. Išspręskite lygtį

$$10\,101\cdot\left(\frac{5}{111\,111}-\frac{4}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37}+\frac{5}{2002\cdot x}\right)=\frac{7}{22}.$$

94.1. Varžėsi dvi gimnastų komandos, turinčios vienodą dalyvių skaičių. Kiekvieno dalyvio pasirodymas buvo įvertintas tik 8 arba 9 balais. Visi dalyviai surinko 156 balus. Kiek gimnastų dalyvavo varžybose?

94.2. Išspręskite lygtį

$$4{,}98-120{,}12:\left(8{,}008\cdot\left(4{,}0025-\frac{1{,}12211-2\cdot x}{4{,}444}\right)\right)+0{,}03=1{,}01.$$

95.1. Skaičiai nuo 1 iki 9 surašyti kvadratinėje lentelėje taip: kiekvienos eilutės, kiekvieno stulpelio ir įstrižainių sumos yra lygios. Kuriame langelyje gali būti parašytas 1?

95.2. Jeigu stačiakampio ilgį padidintume 2 m, jo plotas padidėtų 12 m^2. Ar galima apskaičiuoti stačiakampio ilgį ir plotį? Jeigu galima, apskaičiuokite.

96.1. Įrodykite, kad keturių iš eilės einančių natūraliųjų skaičių suma negali būti pirminis skaičius.

96.2. Garlaivis plaukė 6 h upe pasroviui, o sugrįžo per 10 h. Upės tėkmės greitis 5 km/h. Kokiu vidutiniu greičiu nuplaukė garlaivis visą kelią?

97.1. Iš vietovės M į vietovę N kelionė automobiliu truko kelias valandas. $\frac{3}{4}$ šio laiko jis važiavo 75 km/h greičiu, o visą kitą kelią — 45 km/h greičiu. Kokiu vidutiniu greičiu automobilis važiavo iš M į N?

97.2. Kokį skaičių reikia atimti iš trupmenos $\frac{52\,367}{47\,633}$ skaitiklio ir pridėti prie jos vardiklio, kad suprastinta trupmena būtų $\frac{17}{83}$?

98.1. Traukinys iš Vilniaus į Kauną važiavo 50 km/h, o grįžo — 60 km/h greičiu. Raskite vidutinį traukinio greitį.

98.2. Suprastinę trupmeną, kurios skaitiklio ir vardiklio suma 4140, gauname $\frac{7}{13}$. Raskite nesuprastintą trupmeną.

99.1. Pirmąjį viso kelio trečdalį automobilis nuvažiavo 54 km/h greičiu, antrąjį — 45 km/h greičiu ir trečiąjį — 60 km/h greičiu. Raskite vidutinį automobilio greitį. (Atsakymą pateikite 0,1 km/h tikslumu.)

99.2. Padalijus sveikąją skaičiaus dalį iš $\frac{8}{225}$, gauta 900, o padalijus jo trupmeninę dalį iš $\frac{8}{225}$, gauta 15. Raskite tą skaičių.

100.1. Iš gyvenvietės B 8 valandą 30 minučių išvažiavo „Moskvičius", o iš gyvenvietės A jam iš paskos tuo pačiu metu — „Žiguliai". Atstumą AB „Žiguliai" nuvažiuoja per $2\frac{1}{5}$ h. „Moskvičiaus" greitis $2\frac{16}{17}$ karto mažesnis. Kelintą valandą „Žiguliai" pasivys „Moskvičių"?

100.2. Nubraižykite keturkampį, kurio viršūnių koordinatės $(-3;\ -2)$, $(-3;\ 5)$, $(1;\ 5)$, $(1;\ -2)$. Apskaičiuokite to keturkampio perimetrą ir plotą.

101.1. Iš dviejų miestų, tarp kurių atstumas 560 km, tuo pačiu metu vienas priešais kitą išvažiavo du automobiliai ir susitiko po 4 h. Jei pirmojo automobilio greitis būtų 15% mažesnis, o antrojo — 20% didesnis, jie susitiktų taip pat po 4 h. Raskite kiekvieno automobilio greitį.

101.2. Išspręskite lygtį

$$\left(3{,}25-\frac{\left(6\frac{9}{16}-2\frac{1}{2}x\right)\cdot 0{,}53}{0{,}75}\right):6\frac{2}{3}=\frac{4}{15}.$$

102.1. Traukinių greitis viename kelio ruože padidėjo 25%. Kiek procentų sutrumpėjo kelionės šiuo ruožu laikas?

102.2. Išspręskite lygtį

$$\left(\frac{2}{11\cdot 13}+\frac{2}{13\cdot 15}+\frac{2}{15\cdot 17}+\frac{2}{17\cdot 19}+\frac{2}{19\cdot 21}\right)\cdot 462-$$
$$-(2{,}04:(x+1{,}05)):0{,}12=19.$$

103.1. Skaičius buvo padidintas 25%. Kiek procentų reikia sumažinti didesnįjį skaičių norint vėl gauti duotąjį?

103.2. Apskaičiuokite reiškinio $\frac{8x^3+62}{4x^2-4x+1}$ reikšmę, kai x lygus: a) -10; b) 0,5.

104.1. Išspręskite lygtį

$$(3{,}8\cdot 1{,}7-38x):1{,}9=-0{,}85\cdot(x-4).$$

104.2. Vienas dėmuo sudaro $\frac{5}{12}$ kito. Kiek procentų jų sumos sudaro mažesnysis dėmuo? (Atsakymą pateikite 0,1% tikslumu.)

105.1. Sandėlyje yra 200 kg 16% drėgnumo grūdų. Po džiovinimo jų masė sumažėjo 20 kg. Koks dabar grūdų drėgnumas? (Apskaičiuokite 0,1% tikslumu.)

105.2. Nesuprastinama trupmena, kurios skaitiklio ir vardiklio sandauga 550, gali būti išreikšta baigtine dešimtaine trupmena. Raskite šią trupmeną.

106.1. Raskite mažiausią skaičių, kurį padalijus iš 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ir 10, gaunamos atitinkamai liekanos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ir 9.

106.2. Kiek gramų 8% sieros rūgšties galima gauti iš 200 g 62% sieros rūgšties?

107.1. Raskite visus skaičius, didesnius už 10 000, bet mažesnius už 15 000, kuriuos padalijus iš 453 ir iš 755, gaunama liekana 175.

107.2. Įrodykite, kad dviejų skaičių didžiausio bendrojo daliklio ir mažiausio bendrojo kartotinio sandauga lygi tų skaičių sandaugai.

108.1. Duotos trupmenos $\frac{35}{396}$ ir $\frac{28}{297}$. Raskite mažiausią teigiamą racionalųjį skaičių, kurį padalijus iš kiekvienos šių trupmenų, gaunami sveikieji skaičiai.

108.2. Dviejų skaičių, nedalių vienas iš kito, mažiausias bendrasis kartotinis lygus 420, o jų didžiausias bendrasis daliklis 20. Raskite tuos skaičius.

109.1. Duotos trupmenos $\frac{385}{156}$ ir $\frac{231}{130}$. Raskite didžiausią racionalųjį skaičių, iš kurio padalijus duotąsias trupmenas, gaunami sveikieji skaičiai.

109.2. Pirmą kartą nukainojant prekes jų kainos buvo sumažintos 20%, antrą kartą — 15%. Kiek procentų atpigo prekės, palyginti su pradine jų kaina?

110.1. Galvosūkis. Berniukas, susipažinęs su šachmatų figūrų ėjimo taisyklėmis, pareiškė: „Dabar aš galiu žaisti tuo pačiu metu su dviem geriausiais pasaulio šachmatininkais (su vienu — baltosiomis figūromis, su kitu — juodosiomis) ir tikrai nepralaimėsiu abiejų partijų". Kaip turėtų žaisti berniukas, kad ištesėtų pažadą?

110.2. Triženklis skaičius dalus iš 8. Jo skaitmenų sandauga lygi nuliui, o dešimčių skaitmuo 4 didesnis už vienetų skaitmenį. Raskite tą skaičių.

VII—VIII KLASĖ

1.1. Salėje yra apie 80 mokinių. Trečdalis jų — mergaitės. Pusė mergaičių mokosi VII klasėje. $\frac{5}{7}$ salėje esančių berniukų nesimoko VII klasėje. Kiek septintokų yra salėje?

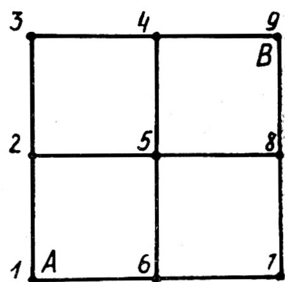
1.2. Tiesėje pažymėta n taškų. Kiek joje iš viso yra skirtingų atkarpų?

2.1. Du tekintojai — Antanas ir Petras — per savaitę turėjo pagaminti kartu mažiau kaip 1000 detalių. Pirmą, antrą ir trečią dieną Antanas įvykdė $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{6}$ ir $\frac{7}{20}$ savo užduoties, o Petras tomis dienomis — $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{11}$ ir $\frac{2}{7}$ savo užduoties. Kiek detalių pagamino kiekvienas tekintojas trečią dieną, jeigu kasdien jie pagamindavo po sveiką detalių skaičių?

2.2. Trikampio pagrindas padalytas į 7 dalis. Kiekvienas dalijimo taškas sujungtas su trikampio viršūne B. Kiek trikampių yra iš viso?

3.1. Berniukas nuo pusiaukelės pradėjo žiūrėti pro vagono langą. Jis žiūrėjo tol, kol liko nuvažiuoti pusė kelio, nuvažiuoto žiūrint pro langą. Kurią viso kelio dalį berniukas žiūrėjo pro langą?

3.2. Skaitmenimis sužymėkite visus kelius, kuriais galima patekti iš taško *A* į tašką *B* (6 pav.) judant brėžinio atkarpomis iš kairės į dešinę ir iš apačios į viršų (pavyzdžiui, kelias *1 2 5 4 9*). Kiek tokių kelių veda iš *A* į *B*?



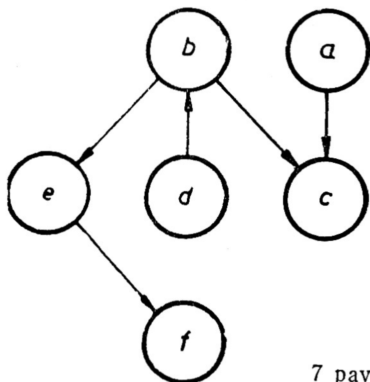
6 pav.

4.1. Meškeriotojas kiekvieną sugautą karšį laikė trimis žuvimis, o kiekvienus tris pūgžlius — viena žuvimi. Baigęs žvejoti, šitaip jis suskaičiavo 24 žuvis. Paaiškėjo, jog ir krepšyje yra 24 žuvys. Kiek karšių sugavo meškeriotojas?

4.2. Turite keturis 9 cm ilgio vielos gabalus. Nepjaustydami jų sudarykite stačiakampį gretasienį, kurio briaunų ilgiai būtų 4 cm, 3 cm ir 2 cm. Sprendimą pateikite brėžiniu.

5.1. Ar gali 8 žmonės atvykti iš miesto *A* į miestą *C* per miestą *B* skirtingais keliais, jeigu iš miesto *A* į miestą *B* veda trys keliai, o iš miesto *B* į miestą *C* — du?

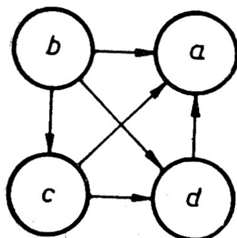
5.2. Skrituliukuose buvo parašyti skaičiai 1, 2, 3, 4, 6, 12 ir nuo kiekvieno skaičiaus į jo daliklius nubrėžtos rodyklės. Dalį jų mokinys nutrynė, o vietoj skaičių parašė raides *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* (7 pav.). Nubraižykite pradinį brėžinį.



7 pav.

6.1. Frezavimo staklės sudaro 32% visų įmonės staklių; šlifavimo staklių yra 20% mažiau negu frezavimo, o visos kitos — tekinimo staklės. Kiek procentų tekinimo staklių yra daugiau negu šlifavimo?

6.2. Skrituliukuose vietoj *a*, *b*, *c*, *d* parašykite keturis skirtingus natūraliuosius skaičius. Kiekvienas jų turi būti ne didesnis už 100 ir atitikti nubrėžtą rodyklę, kuri nukreipta į jo daliklį, nelygų pačiam skaičiui (8 pav.). Kokį didžiausią skaičių galima parašyti vietoj *a*?



8 pav.

7.1. Yra 10 dėžių: keliose iš jų — po 10 mažesnių dėžių, o kai kuriose mažesnėse — dar po 10 dėžių. Netuščios yra 54 dėžės. Kiek dėžių yra iš viso?

7.2. Jei prie sugalvoto triženklio skaičiaus pridėtume 12 ir gautąjį skaičių padalytume iš 7, tai gautume liekaną, lygią 5. Jei prie to paties sugalvoto skaičiaus pridėtume 14 ir gautą skaičių padalytume iš 9, tai liekana būtų vėl 5. Jei prie sugalvoto skaičiaus pridėtume 18 ir gautąjį skaičių padalytume iš 13, tai ir dabar liekana būtų 5. Raskite sugalvotą skaičių.

8.1. Slidinėjimo, šuolių nuo tramplino ir žiemos dvikovės (slidinėjimo bei šuolių) varžybose dalyvavo daugiau kaip 60 sportininkų. Iš jų nuo tramplino šoko 45 žmonės, o slidžių trasą įveikė 40 sportininkų. Įrodykite, kad varžybose dalyvavo mažiau kaip 25 dvikovininkai.

8.2. Iš keturženklio skaičiaus atimtas skaičius, sudarytas iš tų pačių skaitmenų, surašytų atvirkščia tvarka. Ar skirtumas gali būti 1008?

9.1. Trijų skaičių suma 254,772. Jeigu viename jų perkeltume kablelį per du skaitmenis į dešinę, tai gautume didesnįjį skaičių, o jeigu tame pačiame skaičiuje kablelį perkeltume per vieną skaitmenį į kairę, tai gautume mažesnįjį skaičių. Raskite tuos skaičius.

9.2. Duota lygybė $(a+b+c+d)^4=\overline{abcd}$. Raskite keturženklį skaičių $\overline{abcd}$.

10.1. Vienas skaičius didesnis už kitą 16 vienetų. $\frac{5}{32}$ didesniojo skaičiaus lygu $\frac{3}{16}$ mažesniojo. Raskite tuos skaičius.

10.2. Kurio skaičiaus skaitmenų suma lygi 328 ir jo paties skirtumui?

11.1. Viena mašininkė gali perrašyti rankraštį per 5 h 20 min, o kita — per 4 h 40 min. Dirbdamos kartu jos perrašė 90 puslapių. Kiek puslapių perrašė kiekviena mašininkė?

11.2. Kas daugiau: 100^{20} ar 9000^{10}?

12.1. Trikampio kraštinių ilgis a, b ir c. Ar gali a sutikti su b taip, kaip $2:3$, o b — su c, kaip $4:5$?

12.2. Ar teisingas teiginys: formule $2^{2n+1}-1$ $(n\in N)$ išreikšti skaičiai yra pirminiai?

13.1. Per pirmąjį ketvirtį įmonė įvykdė 26% metinės užduoties, o produkcijos kiekis, pagamintas per antrąjį, trečiąjį ir ketvirtąjį

ketvirtį, proporcingas 6,5; 7,8 ir 9,1. Per antrąjį ketvirtį ji pagamino $1\frac{1}{4}$ karto produkcijos daugiau negu per pirmąjį. Apskaičiuokite, kiek procentų įmonė viršijo metinę užduotį.

13.2. Triženklis skaičius sudarytas iš skirtingų nelygių nuliui skaitmenų. Jei sudėtume visus neturinčius vienodų skaitmenų dviženklius skaičius, kuriuos galima sudaryti iš to triženklio skaičiaus skaitmenų, gautume pradinį skaičių. Raskite tokius triženklius skaičius.

14.1. Mokiniams buvo pateikta 30 klausimų. Už kiekvieną teisingą atsakymą skiriami 7 taškai, o už klaidingą nubraukiama 12 taškų. Kiek teisingų atsakymų pateikė mokinys, kuris surinko 77 taškus?

14.2. Dviženklio natūraliojo skaičiaus ir skaičiaus, sudaryto iš tų pačių skaitmenų, surašytų atvirkščia tvarka, sandauga lygi 2430. Raskite tą dviženklį skaičių.

15.1. Ketvirtadalį atstumo tarp vietovių A ir B automobilis nuvažiavo 45 km/h greičiu, o visą kitą kelią — 75 km/h greičiu. Raskite vidutinį automobilio greitį nuo A iki B. (Atsakymą pateikite 0,1 km/h tikslumu.)

15.2. Mokinys nutarė sunumeruoti sąsiuvinį nelyginiais skaičiais 1, 3, 5, 7, 9 ir t. t. žymėdamas juos vienoje lapo pusėje. Iš viso jis parašė 104 skaitmenis. Kiek puslapių sąsiuvinyje ir kiek kartų mokinys parašė skaitmenį 7?

16.1. Du septintokai — Justas ir Vytas — startavo tuo pačiu metu. Po 48 s tarp jų buvo 20 m atstumas. Justas distanciją nubėgo per 1 min 15 s, o Vytas tą patį nuotolį — per 1 min 20 s. Kiek metrų per minutę nubėgo kiekvienas berniukas?

16.2. Jeigu dviejų sveikųjų skaičių sandauga yra nelyginis skaičius, tai tų pačių skaičių suma visada lyginis skaičius. Įrodykite.

17.1. Stačiakampio perimetras 18 cm. Jei stačiakampio ilgį sumažintume 20%, o plotį padidintume 25%, tai perimetras nepasikeistų. Raskite stačiakampio plotą.

17.2. Kuriuo skaitmeniu baigiasi sandauga visų nelyginių dviženklių skaičių? visų nelyginių penkiaženklių skaičių?

18.1. Kuriuo skaitmeniu baigiasi kiekvienas iš nurodytų reiškinių: a) 3^{2n+1}; b) 4^{2n+1}; c) 5^{7n+2}, kai n — natūralusis skaičius?

18.2. Apskaičiuokite reiškinio

$$2-\frac{1000}{1001}+\frac{999}{1001}-\frac{998}{1001}+\frac{997}{1001}-\frac{996}{1001}+\ldots$$ reikšmę.

Reiškinio paskutinis dėmuo yra teigiamas, o iš viso jis turi 500 teigiamų dėmenų.

19.1. a — nelyginis natūralusis skaičius, b — natūralusis skaičius. Įrodykite, kad skaičiai a ir $ab+4$ tarpusavy pirminiai (t. y. jų didžiausias bendrasis daliklis lygus 1).
19.2. Egzistuoja du iš eilės einantys natūralieji skaičiai, kurių kiekvieno skaitmenų suma dalijasi iš 116. Pateikite pavyzdį.

20.1. Įrodykite, kad trupmena $\frac{m+1}{2m+1}$, kai m — natūralusis skaičius, yra nesuprastinama.
20.2. Sugalvokite taisyklę, pagal kurią galėtute parašyti du iš eilės einančius natūraliuosius skaičius, kurių kiekvieno skaitmenų suma dalijasi iš 125. Pateikite pavyzdį.

21.1. Įrodykite, kad bet kurie du natūralieji skaičiai a ir b turi tokią savybę: arba a, arba b, arba $a+b$, arba $a-b$ dalijasi iš 3.
21.2. Keliais skirtingais būdais galima suskliausti reiškinį $3:3:3$ vienais skliaustais ir reiškinį $3:3:3:3$ dvejais skliaustais? Kiek galima gauti reiškinių skirtingų reikšmių? (Suskliautimo būdai laikomi skirtingais, jeigu skliaustai nustato ne tą pačią veiksmų atlikimo tvarką.)

22.1. Apskaičiuokite: $(27^{10}-5\cdot 81^4\cdot 3^{12}+4\cdot 9^8\cdot 3^8):(41\cdot 3^{24})$.
22.2. Į kiekvieną kvadratinės lentelės (3×3) langelį įrašykite po vieną tokį skaitmenį (galite ir vienodus), kad dviejų kvadrato eilučių ir dviejų stulpelių (išskyrus vidurinę eilutę ir vidurinį stulpelį) bei abiejų įstrižainių triženkliai skaičiai skaitant juos tiek nuo pradžios, tiek nuo galo, būtų natūraliųjų skaičių kvadratai. Tie triženkliai skaičiai lentelėje negali prasidėti nuliu.

23.1. Apskaičiuokite: $(10^{12}+5^{11}\cdot 2^9-5^{13}\cdot 2^8):(4\cdot 5^5\cdot 10^6)$.
23.2. Keturženklis skaičius yra natūraliojo skaičiaus kvadratas. Du pirmieji ir du paskutiniai jo skaitmenys vienodi. Raskite tą keturženklį skaičių.

24.1. Įrodykite, kad kiekvieno pirminio skaičiaus (išskyrus 2 ir 3) išraiška yra $6n+1$ arba $6n+5$; čia n — neneigiamas sveikasis skaičius. Ar teisingas atvirkštinis teiginys: kiekvienas $6n+1$ arba $6n+5$ skaičius yra pirminis?
24.2. Apskaičiuokite:

$$5-\frac{1002}{1003}+\frac{1001}{1003}-\frac{1000}{1003}+\frac{999}{1003}-\frac{998}{1003}+\frac{997}{1003}-\ldots+\frac{35}{1003}.$$

25.1. Duoti du pirminiai skaičiai dvynukai, didesni už 3. (Dvynukais vadiname pirminius skaičius, kurių skirtumas lygus 2.) Įrodykite, kad jų suma dalijasi iš 12.
25.2. Kiekviena kvadrato kraštinė buvo padidinta 20%. Kiek procentų padidėjo kvadrato plotas?

26.1. Įrodykite, kad trijų iš eilės einančių natūraliųjų skaičių sandauga visada dalijasi iš 6. Kada tokia sandauga dalijasi iš 24?
26.2. Kas daugiau: 3^{303} ar 2^{454}?

27.1. Lygiašonio trikampio viršūnės kampo ir kampo prie pagrindo pusiaukampinės sudaro kampą, kurio laipsninis matas lygus 130°. Raskite trikampio kampus.

27.2. Įrodykite lygybę $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+$ $+\ldots+\frac{1}{200}$.

28.1. Futbolo pirmenybėse dalyvavo 16 komandų. Buvo žaidžiama turais (vieną dieną visos komandos žaidė po vienerias rungtynes). Už pergalę komandai skiriami 2 taškai. Lygiųjų atveju mušami 11 m baudiniai, ir nugalėjusi komanda gauna 1 tašką. Po 16 turų (komanda su kiekviena kita turėjo žaisti du kartus — vieną kartą savo, kitą kartą varžovės aikštėje) visos komandos surinko 222 taškus. Kiek rungtynių baigėsi lygiosiomis?
28.2. Tarp 76 iš pažiūros vienodų rutuliukų yra vienas lengvesnis. Kaip lėkštinėmis svarstyklėmis be svarsčių surasti lengvesnįjį rutuliuką?

29.1. Raskite tokį penkiaženklį skaičių $\overline{abcde}$, iš kurio skaitmenų sudaryti dviženkliai skaičiai $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{de}$ būtų sveikųjų skaičių kvadratai.
29.2. Skaičiai a ir b tenkina nelygybę $ab<a+b<a-b$. Kokie tie skaičiai — teigiami ar neigiami?

30.1. Kiek dviženklių ir kiek triženklių skirtingų sumų galima gauti sudėjus du natūraliuosius dviženklius skaičius?
30.2. Trikampio kraštinių ilgis išreikštas sveikaisiais skaičiais. Viena jų lygi 5, o kita — 1. Kam lygus trečiosios kraštinės ilgis?

31.1. Parašyti iš eilės natūralieji skaičiai nuo 1 iki 101 imtinai sudaro daugiaženklį skaičių. Įrodykite, kad tas skaičius sudėtinis. Ar jis yra natūraliojo skaičiaus kvadratas?
31.2. Jei prie skaičiaus a pridėtume jo skaitmenų sumą b, o prie to rezultato dar pridėtume skaičiaus b skaitmenų sumą, tai gautume 60. Raskite skaičių a.

32.1. Berniukas padalijo skaičių 392 iš natūraliojo skaičiaus a ir iš dalmens atėmė a. Skirtumą vėl padalijo iš a ir vėl atėmė a. Naująją skirtumą dar kartą padalijo iš a ir atėmė a. Gavo $-a$. Raskite skaičių a.

32.2. Viename name gyvena šaltkalvis, tekintojas ir suvirintojas. Jų pavardės Budreika, Petraitis ir Stankus. Šaltkalvis iš jų jauniausias. Jis neturi nei brolių, nei seserų. Stankus vyresnis už tekintoją ir yra vedęs Budreikos seserį. Kokia pavardė šaltkalvio? tekintojo? suvirintojo?

33.1. Spalvotas pieštukas kainuoja ne daugiau kaip 10 ct. 3 paprasti pieštukai brangesni už 1 spalvotą, o 2 spalvoti pieštukai brangesni už 5 paprastus (pieštukų kaina — sveikasis centų skaičius). Kiek kainuoja paprastas pieštukas?

33.2. Trys draugės — Asta, Rasa ir Eglė — vilki balta, žalia ir ruda suknelėmis. Jų bateliai irgi šių trijų spalvų. Tik Astos suknelė ir bateliai vienos spalvos. Rasos nei suknelė, nei bateliai nėra balti. Eglė avi žalius batelius. Nustatykite kiekvienos mergaitės suknelės ir batelių spalvą.

34.1. Kas daugiau: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 20$ ar $1+2+3+\ldots+1\,000\,000$?

34.2. Dviračių lenktynėse dalyvavo penki mokiniai ir užėmė skirtingas vietas. Po varžybų keturi jų klasės draugai pasakė:
a) Simas užėmė antrą vietą, Kazys — trečiąją;
b) Marius užėmė trečią vietą, Tomas — penktąją;
c) Tomas užėmė pirmą vietą, Marius — antrąją;
d) Simas užėmė antrą vietą, Vladas — ketvirtąją.
Kiekvieno teiginio viena dalis teisinga, kita — klaidinga. Kurią vietą užėmė kiekvienas mokinys?

35.1. Išspręskite lygtį
$\overline{xy}^{\,x:y} = \overline{yztu}$.

35.2. Įrodykite, kad iš kiekvienų šešių žmonių visada atsiras arba trys pažįstami vienas su kitu, arba trys nepažįstami.

36.1. Apskaičiuokite reiškinio $a^{31} - 74a^{30} + 74a^{29} - \ldots + 74a^{17} - 74a^{16} + 73a^{15} + 15$ reikšmę, kai $a = 73$.

36.2. Trijų namų šeimininkai turi savo šulinius. Kartais tai vienas, tai kitas šulinys išdžiūsta, todėl tenka eiti vandens pas kaimyną. Kad netrukdytų vienas kitam, šeimininkai nutarė nuo savo namų iki visų trijų šulinių išminti takus, nekertančius kaimynų takų. Ar gali jie tai padaryti?

37.1. Įrodykite: jei vieną iš dviejų skaičių padalijus iš 3, gaunama liekana 1, o kitą — liekana 2, tai jų sandaugą padalijus iš 3, liekana lygi 2.

37.2. Suprastinkite trupmeną
$$\frac{116\,690\,151}{427\,863\,887}.$$

38.1. Sumažintomis kainomis pardavus žaislus, kurių kiekvienas anksčiau kainavo 50 ct, gauta 31 Lt 93 ct. Kiek procentų buvo sumažinta žaislo kaina? (Žaislo kaina — sveikasis centų skaičius.)
38.2. Raskite dviženklį natūralųjį skaičių, kuris sumažėja 14 kartų nubraukus jo vienetų skaitmenį.

39.1. Įrodykite, kad dviejų iš eilės einančių nelyginių natūraliųjų skaičių kvadratų skirtumas dalijasi iš 8.
39.2. Knygynas gavo knygų, kurių kaina 20% mažesnė už nominalinę (nurodytą viršelyje), o pardavė jas nominaline kaina. Kiek procentų pelno gavo knygynas?

40.1. Raskite išraiškos $*00\ldots0{*}{*}$ n-ženklius skaičius, kurie dalijasi iš 15, 18 ir 20.
40.2. Stačiojo lygiašonio trikampio statinis 8 cm. Įžambinėje pažymėtas taškas M. Raskite atstumų nuo šio taško iki trikampio statinių sumą.

41.1. Du keleiviai tuo pačiu metu išėjo iš A į B. Vienas jų pirmąją pusę kelionėje sugaišto laiko ėjo 5 km/h greičiu, o antrąją — 4 km/h greičiu. Kitas keleivis pirmąją pusę kelio ėjo 4 km/h greičiu, o antrąją — 5 km/h greičiu. Katras anksčiau atėjo į B?
41.2. Įrodykite tapatybes:
a) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
b) $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$.
Taikydami šias tapatybes įrodykite, kad daugianario
$(x^3+ax-b)^3-3(x^3+ax-b)^2(ax-b)+3(x^3+ax-b)\times$
$\times(ax-b)^2-(ax-b)^3-(x^6+5x^3+25)(x^3-5)$ reikšmė nepriklauso nuo a, b ir x.

42.1. Keturženklio ir triženklio skaičiaus suma 4190, o skaičių, parašytų tais pačiais skaitmenimis atvirkščia tvarka, suma lygi 6980. Raskite tuos skaičius.
42.2. Įrodykite, kad su visomis sveikosiomis m ir n reikšmėmis $(5m+3n+1)^5(3m+n+4)^4$ dalijasi iš 16.

43.1. Apskaičiuokite reiškinio $\frac{5^3a^5-1000a^3-8{,}9896}{a^4-3a^2-4}$ reikšmę, kai:
a) $a=-0{,}2$; b) $a=-2$.
43.2. Skriestuvu ir liniuote padalykite 54° kampą į tris lygias dalis.

44.1. Geografijos kabinetui nupirkta gaublių po 4 Lt ir m žemėlapių po 1 Lt 20 ct. Visas pirkinys kainavo 50 Lt. Kiek nupirkta gaublių? Kurias reikšmes gali įgyti kintamasis m?

44.2. Raskite pirminius skaičius p, su kuriais reiškinio p^3+p^2+ $+11p+2$ reikšmė yra pirminis skaičius.

45.1. Išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} |x|=3, \\ x+6y=3. \end{cases}$$

45.2. Kurio skaičiaus kubas yra 999 400 119 992?

46.1. Komiso parduotuvė nupirko du daiktus už 360 Lt. Pardavusi juos, gavo 25% pelno. Vieno daikto antkainis 50%, o kito — 12,5%. Kokia kaina buvo parduotas kiekvienas daiktas?

46.2. Duota tiesė AB ir nevienodai nutolę nuo jos taškai M bei N. Tiesėje AB raskite tokį tašką, kurio atstumų nuo M ir N skirtumas būtų didžiausias.

47.1. Iš dviejų cisternų tuo pačiu metu pilstomas benzinas: iš pirmos kasdien išpilama 16,5 t, o iš antros — 11,4 t. Iš antros cisternos išpylus visą benziną, pirmoje dar liko 25 t. Jei iš pirmos kasdien būtų išpilama 10 t, o iš antros — 6 t, tai iš abiejų cisternų tuo pačiu metu būtų išpiltas visas benzinas. Kiek tonų benzino buvo iš pradžių kiekvienoje cisternoje?

47.2. Duota tiesė AB ir nevienodai nutolę nuo jos taškai M bei N. Tiesėje AB raskite tokį tašką, nuo kurio iki M ir N atstumų suma būtų mažiausia.

48.1. Jei šešiaženklio skaičiaus pirmasis ir ketvirtasis, antrasis ir penktasis, trečiasis ir šeštasis skaitmenys poromis vienodi, tai šis skaičius dalijasi iš 7, 11 ir 13. Įrodykite.

48.2. Raskite skaitmenis x, y, z, kai $\frac{1}{x+y+z}=0{,}xyz$.

49.1. Keleivis į klausimą, koks jo bilieto numeris, atsakė taip: „Visi mano bilieto skaitmenys skirtingi. Jei visus šešis dviženklius skaičius, kuriuos galima sudaryti iš numerio skaitmenų, sudėtume, pusė jų sumos būtų mano bilieto numeris". (Čia prie dviženklių skaičių nepriskiriami tie, kurie turi abu vienodus skaitmenis.) Koks bilieto numeris?

49.2. Ar gali būti natūraliojo skaičiaus kvadratas šis skaičius: a) $\overline{acac}$; b) $\overline{abcabc}$?

50.1. Išskaidykite dauginamaisiais: a^3+a^2+4.

50.2. Išspręskite lygtį $\overline{xyztu}=x^5+y^4+z^3+t^2+u$.

51.1. Išskaidykite dauginamaisiais: a^5+a+1.
51.2. Per duoto skritulio vidaus tašką A, nesutampantį su skritulio centru O, nubrėžkite stygą, kurią taškas A dalija pusiau.

52.1. Išskaidykite dauginamaisiais: $ab(a-b)-ac(a+c)+bc(2a+c-b)$.
52.2. Lygiašonio trikampio viršūnės kampo laipsninis matas lygus 36°. Įrodykite, kad kampo prie pagrindo pusiaukampinė dalija duotąjį trikampį į du lygiašonius trikampius.

53.1. Išskaidykite dauginamaisiais:
$(x^2+4x+8)^2-3x(x^2+4x+8)+2x^2$.
53.2. Triženklio skaičiaus skaitmenų suma 17. Jį padalijus iš 419, gaunama liekana 75. Raskite tą triženklį skaičių.

54.1. Įrodykite, kad n^3+3n^2+8n dalijasi iš 6, kai n — bet kuris natūralusis skaičius.
54.2. Įrodykite, kad penkių iš eilės einančių natūraliųjų skaičių kvadratų suma negali būti natūraliojo skaičiaus kvadratas.

55.1. Turnyre dalyvauja 30 pradedančiųjų šachmatininkų. Atskyrį gauna tie, kurie surenka ne mažiau kaip 60% didžiausio galimo taškų skaičiaus. Kiek daugiausia šachmatininkų gali gauti atskyrį?
55.2. Įrodykite, kad suma
$2+2^2+2^3+\ldots+2^{99}+2^{100}$
dalijasi iš 3.

56.1. Jei iš antros lentynos perdėtume į pirmąją tiek knygų, kiek jų buvo pirmojoje, tai pirmoje lentynoje knygų būtų 3 kartus mažiau negu antrojoje. Kiek mažiausiai knygų galėjo būti kiekvienoje lentynoje?
56.2. Išskaidykite dauginamaisiais:
$x^3+y^3+z^3-3xyz$.

57.1. Vienoje gyvenvietėje yra 50 mokinių, o kitoje — 100. Kur reikėtų statyti mokyklą, kad kelias, kurį nueina visi mokiniai, būtų trumpiausias?
57.2. Įrodykite, kad $(s-a_1)^2+(s-a_2)^2+\ldots+(s-a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$, kai $a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{n}{2}s$.

58.1. Plentu važiuoja trys automobiliai, kurių kiekvieni du tolsta vienas nuo kito. Kokia automobilių judėjimo kryptis ir kaip turi būti susiję jų greičiai, kad, vienam automobiliui pakeitus važiavimo kryptį priešinga, kiekvieni du automobiliai toltų vienas nuo kito?

58.2. Iššifruokite:
$(***)^3 = 12******3$.

59.1. Tuo pačiu metu iš vieno namo į tą pačią gamyklą išėjo du vyrai — aukštas ir žemas. Žemojo žingsnis buvo 20% mažesnis už aukštojo. Per tą patį laiką žemasis nužengė 20% daugiau žingsnių negu aukštasis. Katras anksčiau atėjo į gamyklą?
59.2. Įrodykite, kad $x^3+y^3+z^3+t^3=3(z+t)(xy-zt)$, jei $x+y+z+t=0$.

60.1. Nubraukus vieną natūraliojo keturženklio skaičiaus skaitmenį, skaičius sumažėjo 10 kartų. Kuris skaitmuo ir kurioje vietoje nubrauktas?
60.2. Kelis sprendinius turi uždavinys?

```
   ***3
 ×   **
 ------
   ***4
+*****
 ------
 *****4
```

61.1. Nubraukus vieną skaitmenį, skaičius sumažėjo 71 kartą. Kuris skaitmuo ir kurioje vietoje nubrauktas?
61.2. Išvardykite visus stačiakampius, kurių kraštinių ilgis išreikštas natūraliaisiais skaičiais, o jų perimetro ir ploto skaitinės reikšmės lygios.

62.1. Du keltai — *A* ir *B* — plaukioja tarp dviejų upės krantų pastoviu greičiu. Tuo pačiu metu jie išplaukė vienas priešais kitą nuo priešingų krantų ir pirmą kartą susitiko už 700 m nuo vieno kranto. Perplaukę upę keltai pakeitė kryptį priešinga ir susitiko už 400 m nuo kito kranto. Koks upės plotis?
62.2. Raskite dalmenį ir liekaną, kuriuos gausite padaliję skaičių $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot15+200$ iš 182.

63.1. Kai valstietė vienam pirkėjui pardavė pusę kiaušinių be 6, antrajam — trečdalį likusių kiaušinių be 6, trečiajam — ketvirtadalį likusių be 6, krepšyje liko dar pusė jos atsineštų kiaušinių. Kiek kiaušinių valstietė turėjo ir kiek ji pardavė kiekvienam pirkėjui? (Senovinis uždavinys.)
63.2. Iššifruokite daugybą:

```
          penki
        × penki
     ----------
         ******
        ******
   +   ******
      ******
     ----------
     *****penki
```

64.1. Šachmatų lentos laukeliuose surašyti skaičiai taip: kiekvienų keturių skaičių, esančių laukeliuose, atitinkančiuose žirgo ėjimą (raidė L), suma yra vienoda. Kiek skirtingų skaičių yra lentoje?

64.2. Atkarpos BD ir BE dalija trikampio ABC kampą B, o atkarpos CD ir CE — jo kampą C į tris lygias dalis. Taškas E yra arčiau kraštinės BC. Įrodykite, kad kampas BDE lygus kampui EDC.

65.1. Ar galima, išbraukus iš skaičiaus 412 384 026 kelis skaitmenis, gauti natūraliojo skaičiaus kvadratą? Suraskite visus galimus sprendinius.

65.2. Stačiojo trikampio ABC įžambinėje AB pažymėti taškai K ir M, be to, $AK=AC$, $BM=BC$. Įrodykite, kad $\angle MCK=45°$.

66.1. Su kuria n reikšme teisinga lygybė $\underbrace{111\ldots111}_{n \text{ vienetų}} \cdot \underbrace{111\ldots111}_{n \text{ vienetų}} =$
$=123\ldots n\ldots321$?

66.2. Stačiajame trikampyje ABC ($\angle C=90°$) nubrėžtos pusiaukampinės AD ir BF. Iš pusiaukampinių pagrindų nubrėžti statmenys DN ir FM įžambinei. Įrodykite, kad $\angle MCN=45°$.

67.1. Įrodykite, kad su kiekvienu natūraliuoju n teisinga lygybė $1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+3+\ldots+n)=n\cdot 1+(n-1)\times \times 2+(n-2)\cdot 3+\ldots+1\cdot n$.

67.2. Jei trikampio pusiaukraštinė yra kartu ir pusiaukampinė, tai toks trikampis lygiašonis. Įrodykite.

68.1. Įrodykite, kad skaičius $88\ldots8$, kurį sudaro 1992 skaitmenys, dalijasi iš 13.

68.2. Skriestuvu ir liniuote padalykite 13° kampą į trylika lygių dalių.

69.1. Iš keturių skaitmenų, kurie nėra nuliai, sudarytas didžiausias ir mažiausias skaičius. Šių skaičių suma 11 220. Apskaičiuokite duotų keturių skaitmenų sumą.

69.2. Duota atkarpa AB ir ją kertanti tiesė l. Nubraižykite trikampį ABC, kurio viena pusiaukampinė būtų tiesėje l.

70.1. Kiekvienas natūralusis skaičius gali būti išreikštas skaičiaus 2 nevienodų laipsnių suma, pavyzdžiui:
$231=2^7+2^6+2^5+2^2+2^1+2^0$.
Kurie triženkliai skaičiai, išreikšti tokia suma, turi daugiausia dėmenų?

70.2. Trys tiesės susikerta taške O. Vienoje jų pažymėtas taškas A — ieškomojo trikampio, kurio pusiaukampinės yra tose tiesėse, viršūnė. Nubraižykite tą trikampį.

71.1. Įrodykite, kad $a=b=c$, jei $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$.

71.2. Nubraižykite statųjį trikampį pagal duotą jo aukštinę, nubrėžtą į įžambinę, ir stačiojo kampo pusiaukampinę.

72.1. Apskaičiuokite reiškinio

$$3\frac{1}{117}\cdot 4\frac{1}{119}-1\frac{116}{117}\cdot 5\frac{118}{119}-\frac{5}{119}$$

reikšmę.

72.2. Nubraižykite statųjį trikampį, kai duotas jo statinis, įžambinės ir kito statinio skirtumas.

73.1. Įrodykite, kad $a^3+b^3+c^3=3abc$, jei $a+b+c=0$.

73.2. Trikampio ABC $AB=BC$; $AC=10$ cm. Per atkarpos AB vidurį D nubrėžtas statmuo kraštinei AB, kertantis kraštinę BC taške E, taškas E sujungtas su A. Trikampio ABC perimetras lygus 40 cm. Apskaičiuokite trikampio AEC perimetrą.

74.1. Jei trikampio kampas lygus kito trikampio kampui ir iš šių kampų viršūnių nubrėžtos pusiaukampinės ir aukštinės yra atitinkamai lygios, tai trikampiai yra lygūs. Įrodykite.

74.2. Aiškindami raskite nežinomus skaitmenis:

```
 ******* |**
-**      |*****
 ---      **2**
  ***
 -***
  ----
    **
   -**
    --
     0
```

75.1. Jei a, b, c — teigiami skaičiai ir $a^2+b^2+c^2=\frac{5}{3}$, tai $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}<\frac{1}{abc}$. Įrodykite.

75.2. Skirtingos raidės žymi skirtingus skaitmenis. Vienodos raidės žymi tą patį skaitmenį. Iššifruokite sudėtį, nurodydami visus sprendinius:

$$\begin{array}{r} \textit{penki} \\ +\ \textit{penki} \\ \hline \textit{dešimt} \end{array}$$

76.1. Apskaičiuokite reiškinio $\frac{2a-b}{3a-b}+\frac{5b-a}{3a+b}$ reikšmę, kai $10a^2-3b^2+5ab=0$ ir $a\neq 0$.

76.2. Raskite nežinomus skaitmenis ir paaiškinkite:

```
  ********  |***
 -***        **8**
  -----
   ****
  -***
   -----
    ****
   -****
    -----
        0
```

77.1. Suprastinkite reiškinį
$70(71^9+71^8+71^7+\ldots+71^2+72)+1.$

77.2. Iššifruokite daugybą, jei vietoj žvaigždučių galima rašyti tik skaitmenis 2, 3, 5 ir 7:

```
    **5
 ×   **
   ----
   ****
 +****
  -----
  *****
```

78.1. Klasėje yra 40 mokinių. Krepšinio treniruotes lanko 26 mokiniai, plaukimo — 25, slidinėjimo — 27. Plaukimo ir krepšinio treniruotes lanko 15 mokinių, krepšinio ir slidinėjimo — 16, plaukimo ir slidinėjimo — 18 mokinių. Vienas mokinys nesitreniruoja. Kiek mokinių lanko trijų nurodytų sporto šakų treniruotes? vienos sporto šakos treniruotes?

78.2. Apskaičiuokite reiškinio
$\dfrac{x^4-2x^3+x^2-3x+5}{x^5-x^2-x+2}$ reikšmę, kai $x^3+x-1=0.$

79.1. Iš 100 studentų 28 mokosi anglų kalbos, 30 — vokiečių, 42 — prancūzų, 8 — anglų ir vokiečių, 10 — anglų ir prancūzų, 5 — vokiečių ir prancūzų. Visų trijų kalbų mokosi 3 studentai. Kiek studentų mokosi tik vienos kalbos? Kiek studentų nesimoko nė vienos kalbos?

79.2. Kiek neigiamųjų šaknų turi lygtis
$x^4-5x^3-4x^2-7x+4=0?$

80.1. Triženklio skaičiaus kraštinių skaitmenų skirtumas didesnis už vienetą. Iš jo sudaromas kitas skaičius parašant pirmojo skaitmenis iš dešinės į kairę. Tada iš didesnio skaičiaus atimamas mažesnis. Gauto skirtumo skaitmenys vėl užrašomi iš dešinės į kairę ir tie du skaičiai sudedami. Įrodykite, kad gauta suma nepriklauso nuo pasirinkto triženklio skaičiaus.

80.2. Kiek sveikųjų neneigiamų sprendinių turi lygtis $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1960}$?

81.1. Įrodykite, kad triženklis skaičius dalijasi iš 11, jei jo vidurinysis skaitmuo lygus kraštinių skaitmenų sumai.

81.2. Įrodykite, kad nelygybė $(a-b)^4<a^4+b^4$ yra teisinga, jei $a>0$, $b>0$.

82.1. Pagamintos 65 vienodo didumo ir vienodos formos detalės. Vienos detalės masė šiek tiek skiriasi nuo kitų. Lėkštinėmis svarstyklėmis be svarsčių sverdami tik du kartus nustatykite, ar ji lengvesnė, ar sunkesnė už kitas.

82.2. Įrodykite, kad trikampio ABC kampo A pusiaukampinė sudaro su aukštine, nubrėžta iš viršūnės A, kampą, kuris lygus kitų dviejų to trikampio kampų skirtumo pusei.

83.1. Apskaičiuokite reiškinio $\frac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n-1})^3}$ reikšmę, kai $n\in N$.

83.2. Šešiakampio priešingos kraštinės lygios ir lygiagrečios. Įrodykite, kad šito šešiakampio įstrižainės, jungiančios „priešingas“ viršūnes, susikerta viename taške ir tas taškas dalija jas pusiau.

84.1. Žvejai tvenkinyje tinklu sugavo 42 žuvis, paženklino jas ir vėl suleido į vandenį. Kitą dieną tuo pačiu tinklu jie čia sugavo 48 žuvis, 2 iš jų buvo paženklintos. Remdamiesi šiais duomenimis nustatykite apytikslį žuvų skaičių tvenkinyje.

84.2. Įrodykite, kad $\frac{4ab}{a^2-b^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, jei $a>b>0$ ir $a^2+b^2=6ab$.

85.1. Raskite tokį natūralųjį skaičių, kurį padalijus iš 45, gaunama liekana, lygi dalmens kvadratui.

85.2. Su kuriomis a ir b reikšmėmis lygtis $(x-a)^3-(x-b)^3=b^3-a^3$ turi vienintelį sprendinį?

86.1. Svarstyklių lėkštelėse yra 195 dviejų rūšių saldainiai. Kiekvienoje lėkštelėje — tik vienos rūšies saldainiai. Svarstyklės pusiausviros. Jei iš vienos lėkštelės paimtume 11 saldainių, tai, kad svarstyklės būtų pusiausviros, turėtume perdėti į ją 2 saldainius iš kitos lėkštelės. Kiek saldainių yra kiekvienoje lėkštelėje?

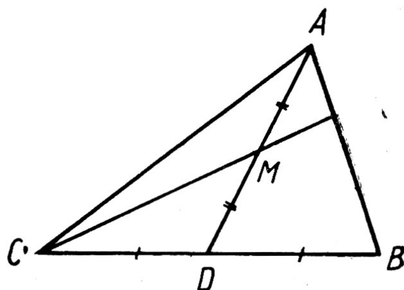
86.2. Įrodykite, kad lygtis $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ neturi realiųjų šaknų, kai a, b ir c — trikampio kraštinių ilgiai.

87.1. Tėvams kartu 80 metų, o jų vaikai 13, 10 ir 6 metų. Tėvas 4 metais vyresnis už motiną. Po kelerių metų vaikų metų suma sudarys 59% tėvų metų sumos. Kiek metų tada bus tėvui ir kiek — motinai?

87.2. Įrodykite, kad kiekvienas natūraliojo skaičiaus, didesnio už 1, kvadratas yra $5m$ arba $5m \pm 1$ išraiškos. Ar ši sąlyga yra būtina ir pakankama, kad toks natūralusis skaičius būtų kito natūraliojo skaičiaus kvadratas?

88.1. Iš vietovių A ir B tuo pačiu metu vienas priešais kitą išėjo Kazys ir Marius. Abu ėjo nesustodami pastoviu greičiu. Pasiekę vietoves B ir A, jie tuoj pat pasuko atgal. Kai juodu susitiko antrą kartą, Kazys buvo nuėjęs 4 km daugiau už Marių. Kazys į vietovę A sugrįžo po 1 h, o Marius — į B po 2,5 h nuo antrojo susitikimo. Kokiu greičiu ėjo Kazys?

88.2. Jei tiesė, nubrėžta per trikampio ABC viršūnę C, dalija pusiaukraštinę AD pusiau, tai kraštinę AB ji dalija santykiu 1 : 2 (9 pav.). Įrodykite.



9 pav.

89.1. Iš prieplaukos upe pasroviui išplaukė motorlaivis ir sugrįžo į ją. Palyginkite motorlaivio sugaištą laiką šioje kelionėje su laiku, per kurį jis įveiktų tą patį nuotolį stovinčiame vandenyje.

89.2. Duotas skritulys, jo skersmuo AB ir taškas M, esantis šalia skritulio, bet nepriklausantis tiesei AB. Naudodamiesi tik liniuote, iš taško M nubrėžkite statmenį tiesei AB.

90.1. Tarp kiekvienų dviejų gretimų skaičių 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 parašykite vieną iš ženklų $+$, $-$, $=$ taip, kad gautute teisingas lygybes. (Skaičių tvarkos keisti negalima.) Įrodykite, kad tai galima padaryti vartojant du lygybės ženklus ir negalima — vartojant vieną lygybės ženklą.

90.2. Įrodykite, kad dviejų trikampio aukštinių pagrindus jungiančios atkarpos vidurio statmuo dalija trečiąją trikampio kraštinę pusiau.

91.1. Įrodykite, kad rubliui iškeisti į 2 kp ir 3 kp vertės monetas yra daugiau būdų negu į 2 kp ir 5 kp vertės monetas.

91.2. Įrodykite, kad nelygybė $\left(\frac{1+ab}{a+b}\right)^2 < 1$ teisinga tik tada, kai vieno skaičiaus (a arba b) modulis didesnis už vienetą, o kito — mažesnis už vienetą.

92.1. Audrius ir Balys turi 8 gaireles: 2 raudonas, 2 baltas, 2 juodas ir 2 mėlynas. Juodu iš eilės stato po gairelę aštuonkampio viršūnėse. Audrius stengiasi keturiose iš eilės einančiose aštuonkampio viršūnėse pastatyti visų spalvų gaireles. Balys jam trukdo. Katras laimės teisingai žaisdamas: a) pirmąją gairelę stato Audrius; b) pirmąją gairelę stato Balys?

92.2. Per lygiagretainio $ABCD$ kraštinės AB vidurį M nubrėžta tiesė DM, kertanti įstrižainę AC taške N. Apskaičiuokite $AN : NC$.

93.1. Skaitmenys pakeisti raidėmis. Vienodos raidės žymi vienodus skaitmenis. Iššifruokite dalybą
$XYYXXY : ABCD = YX$.

93.2. Jei trikampio kraštinių ilgis a, b, c tenkina lygybę $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$, tai tas trikampis yra lygiakraštis. Įrodykite.

94.1. Raskite du skaičius, kurių skirtumas ir dalmuo lygus 5; skaičiui a.

94.2. Įrodykite, kad lygtis $x^2-3y^2=17$ neturi sveikųjų sprendinių.

95.1. Iš pateiktų skaičių porų tik viena netenkina lygties $187x-104y=41$. Netikrinę pasakykite tą porą:

a) $x=3$, $y=5$;
b) $x=107$, $y=192$;
c) $x=211$, $y=379$;
d) $x=314$, $y=565$;
e) $x=419$, $y=753$.

95.2. Kiek 50°C temperatūros vandens reikia sumaišyti su 6 l vandens, kurio temperatūra 15°C, norint gauti vandens temperatūrą, aukštesnę už 30°C, bet žemesnę už 40°C?

96.1. Raskite sveikojo skaičiaus kvadratą, kuris lygus keturių iš eilės einančių nelyginių skaičių sandaugai.

96.2. Palyginkite trupmenas:

$$A=\frac{5\,555\,555\,553}{5\,555\,555\,557} \text{ ir } B=\frac{6\,666\,666\,664}{6\,666\,666\,669}.$$

97.1. Įrodykite, kad $n^4+2n^3+2n^2+2n+1$ nėra skaičiaus kvadratas, kai n — natūralusis skaičius.

97.2. Kada dviejų skaičių sandauga lygi jų dalmeniui?

98.1. Triženklis skaičius dalus iš 45. Jo ir tais pačiais skaitmenimis, bet atvirkščia tvarka, parašyto skaičiaus skirtumas lygus 297. Raskite tą skaičių.

98.2. Nelygių nuliui trupmenų $\frac{a}{b}$ ir $\frac{c}{d}$ sandauga lygi jų skirtumui. Raskite skaičių, atvirkštinių duotiesiems, skirtumą.

99.1. Įrodykite, kad n^2-1 dalijasi iš 24, kai n — pirminis natūralusis skaičius ir $n \geqslant 5$.

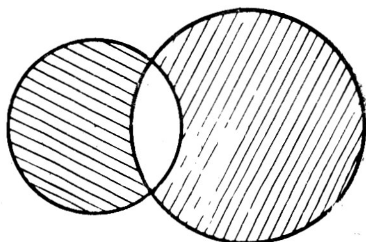
99.2. Duotas lygiagretainis $ABCD$. Tiesėje AB pažymėtas taškas H, o tiesėje BC — taškas K, be to, $KA = AB$ ir $HC = CB$. Įrodykite, kad trikampis KDH — lygiašonis.

100.1. Raskite dviženklį skaičių, lygų trigubai jo skaitmenų sandaugai.

100.2. Įrodykite, kad $a^3+b^3+c^3$ dalijasi iš 6, jei $a+b+c$ dalijasi iš 6; čia a, b, c — sveikieji skaičiai.

101.1. Keliais vienetais reikia sumažinti skaičių 100, kad padalijęs gautą skaičių ir iš 5, ir iš 7 gautume liekaną 1 ir kad pirmas dalmuo būtų 2 vienetais didesnis už antrąjį?

101.2. Apskritimas, kurio spindulys 15 ilgio vienetų, kerta apskritimą, kurio spindulys 20 ilgio vienetų. Skritulių dalys subrūkšniuotos (10 pav.). Kam lygus tų dalių plotų skirtumo modulis?



10 pav.

102.1. Triženklio skaičiaus antrasis skaitmuo — nulis. Išbraukus jį gaunamas dviženklis skaičius, kuris yra to triženklio skaičiaus daliklis. Raskite visus tokius triženklius skaičius.

102.2. Duotas trikampis ABC, kurio $\angle A = \alpha$. Spindulyje CA pažymėtas taškas D; $CD = AB$. Per atkarpų AD ir BC vidurio taškus nubrėžta tiesė l. Raskite kampą tarp tiesių l ir AB.

103.1. Išskleiskite daugianarį x^3+5x^2+8x+6 dvinario $x+1$ laipsniais.

103.2. Duotas trikampis ABC, kurio $\angle ABC = 67°30'$ ir $BC = AD\sqrt{2}$; čia AD — aukštinė. Raskite $\angle BAC$.

104.1. Vytas parašė tris iš eilės einančius natūraliuosius skaičius. Iš jų kubų sumos atėmė trigubą jų sandaugą ir skirtumą padalijo iš tų skaičių aritmetinio vidurkio. Kokį skaičių gavo Vytas?

104.2. Kampo O kraštines kerta lygiagrečios tiesės AB ir A_1B_1. Vienoje kampo kraštinėje yra taškai A ir A_1, o kitoje — taškai B ir B_1. Įrodykite, kad $\frac{OA}{AA_1} = \frac{OB}{BB_1}$.

105.1. Įrodykite, kad vienas kitam atvirkštinių teigiamųjų skaičių suma yra ne mažesnė už 2.
105.2. Įrodykite, kad trikampio pusiaukampinė dalija priešais esančią kraštinę į atkarpas, proporcingas prie jų esančioms trikampio kraštinėms.

IX—X KLASĖ

1.1. Autobuso bilietų numeriai — šešiaženkliai skaičiai. Bilietą, kurio pirmųjų trijų skaitmenų suma lygi paskutinių trijų skaitmenų sumai, laikysime „laimingu". Ar nusipirkę 1000 iš eilės einančių bilietų tikrai rasime nors vieną „laimingą"? Ar gali būti du „laimingi" bilietai iš 10; iš 9 iš eilės einančių bilietų?
1.2. Kampo viršūnė D netelpa brėžinyje, M — taškas, telpantis brėžinyje. Per tašką M nubrėžkite tiesę, einančią per viršūnę D.

2.1. Keli bičiuliai sveikinosi paspausdami vienas kitam ranką. Vienu momentu paaiškėjo, kad iš kiekvienų keturių bičiulių yra bent vienas, jau spėjęs paspausti ranką kitiems trims. Įrodykite, kad bičiuliai dar turi paspausti rankas ne daugiau kaip tris kartus.
2.2. Taškai M_1, M_2, M_3 — taško M vaizdai, gauti centrine simetrija atitinkamai trikampio ABC kraštinių AB, BC, CA vidurio taškų atžvilgiu. Įrodykite, kad trikampiai ABC ir $M_1M_2M_3$ lygūs.

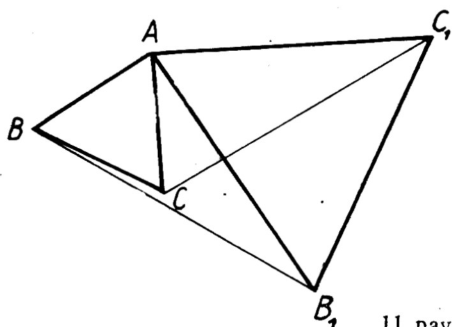
3.1. Laikrodis kas pusvalandį muša vieną dūžį, o kas valandą — valandų skaičių. Tarp 4.00 ir 12.00 valandos laikrodis buvo paleistas. Po 29 dūžių jis sustojo. Yra žinoma, kad laikrodis pradėjo eiti ir sustojo nemušdamas. Kada jis sustojo?
3.2. Trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ yra simetriški taško O atžvilgiu. Įrodykite, kad šių trikampių pusiaukraštinių susikirtimo taškai M ir M_1 simetriški taško O atžvilgiu.

4.1. Įrodykite, kad egzistuoja be galo daug natūraliųjų skaičių kvadratų, kurie baigiasi trimis ketvertais.
4.2. Nubraižykite funkcijos
$y=|1-x|-|x-2|-|x-3|$ grafiką.

5.1. Išspręskite lygtį
$|x-3|+|2-x|=4$.
5.2. Lygiašonio trikampio ABC, kurio $AB=BC$, viršūnės kampas $30°$. Kraštinėje BC pažymėtas taškas D; be to, $AC:BD=\sqrt{2}$. Raskite kampo DAC laipsninį matą.

6.1. Triženklio skaičiaus skaitmenys — pirminiai skaičiai. Kiekvienas skaitmuo yra jo daliklis. Raskite visus tokius triženklius skaičius.

6.2. Lygiakraščiai trikampiai ABC ir AB_1C_1 yra vienodai orientuoti; A — bendra viršūnė (11 pav.). Raskite kampą tarp tiesių BB_1 ir CC_1. Įrodykite, kad atkarpos BB_1 ir CC_1 lygios.



11 pav.

7.1. Skaičiaus 579 dešinėje parašykite tokius tris skaitmenis, kad gautute šešiaženklį skaičių, dalų iš 5, 7 ir 9.

7.2. Kvadratinio sklypo tvoros liko trys stulpai: vienas kampo viršūnėje ir po vieną priešais jį esančio kampo kraštinėse. Atstatykite tvorą.

8.1. Natūralusis skaičius baigiasi skaitmeniu 4. Jei šį skaitmenį perkelsime į skaičiaus pradžią, tai gausime skaičių, keturis kartus didesnį už duotąjį. Raskite mažiausią iš tokių skaičių.

8.2. Nubraižykite lygiakraštį trikampį, kurio viena viršūnė sutampa su tašku O, o kitos dvi priklauso dviem duotiesiems apskritimams.

9.1. Raskite visus natūraliuosius skaičius, kurių kvadratas turi tik nelyginius skaitmenis.

9.2. Kaip skriestuvu ir liniuote galima padalyti $p°$ kampą į p lygių dalių, kai p — natūralusis skaičius, nedalus iš 3 ir 5?

10.1. Raskite du dviženklius skaičius, kurių vieno kubas lygus kito kvadratui.

10.2. Kiekvienas iš dviejų apskritimų liečia abi stačiojo kampo kraštines ir eina vienas per kito centrą. Raskite apskritimų spindulių santykį.

11.1. Įrodykite, kad skaičius, kuris baigiasi dviem vienodais skaitmenimis, nelygiais 0 ir 4, negali būti natūraliojo skaičiaus kvadratas.

11.2. Skritulio viduje yra taškas M, nesutampantis su jo centru. Nubrėžkite stygą AB, kurią taškas M dalytų nurodytu santykiu.

12.1. Kiek keturženklių skaičių, parašytų skaitmenimis 1, 2, 3, dalijasi iš 9?

12.2. Per stačiojo trikampio ABC ($\angle C=90°$) viršūnę A ir aukštinės CD vidurį nubrėžta tiesė, kertanti statinį BC taške M. Įrodykite, kad $\frac{CM}{MB}=\cos^2 A$.

13.1. Triženklis skaičius $\overline{2x1}$ parašytas 1991 kartą. Gautas skaičius yra dalus iš 11. Raskite x.
13.2. Išvesti du apskritimo spinduliai. Nubrėžkite šio apskritimo stygą, kurią tie spinduliai padalytų į tris lygias atkarpas.

14.1. Raskite sumą visų triženklių skaičių, kuriuos galima parašyti trimis skirtingais ir nelygiais nuliui skaitmenimis a, b, c (skaitmenys gali kartotis).
14.2. Iš dviejų vietovės taškų, atstumas tarp kurių 300 m, stebėtojas mato sieną AB 30° kampu. Pirmasis vietovės taškas yra į pietus nuo A, antrasis — į vakarus nuo B. (Laikome, kad pietų šiaurės kryptis yra statmena vakarų rytų krypčiai.) Raskite sienos ilgį.

15.1. Su kuriomis parametro b reikšmėmis lygties $x^2-6x+b=0$ viena šaknis du kartus didesnė už kitą?
15.2. Nubrėžtas spindulys (jo pradžia lygiagretainio $ABCD$ viršūnė A), kertantis įstrižainę BD taške M, kraštinę CD — taške P, kraštinės BC tęsinį — taške Q. Įrodykite, kad $MA^2=MP\cdot MQ$.

16.1. Išspręskite lygtį
$9x^3-13x-6=0$.
16.2. Trikampio ABC kraštinių ilgiai a, b, c ir $\angle B=2\angle A$. Įrodykite, kad $b^2-a^2=ac$.

17.1. Su kuriais x ir y reiškinys $\frac{3y^2-4xy}{x^2+y^2}$ įgyja didžiausią reikšmę? mažiausią reikšmę?
17.2. Trikampio ABC kraštinių ilgiai a, b, c ir $\angle B=90°+\angle A$. Įrodykite, kad $b^2-a^2=c\sqrt{a^2+b^2}$.

18.1. Rimas tarp dviženklio skaičiaus skaitmenų parašė 0 ir gautą triženklį skaičių padalijo iš to dviženklio. Kokį didžiausią ir kokį mažiausią sveikąjį skaičių jis galėjo gauti?
18.2. Įrodykite, kad trikampį galima sukarpyti į n (n — sveikasis skaičius ir $n>5$) trikampių, panašių į duotąjį.

19.1. Įrodykite, kad pirminių skaičių yra be galo daug.
19.2. Taškas M — į trikampį ABC įbrėžto apskritimo centras. Įrodykite, kad apie trikampį AMB apibrėžto apskritimo centras priklauso kampo ACB pusiaukampinei.

20.1. Koks yra mažiausias skaičius n, su kuriuo teisingas teiginys: „Kad ir kuriuos natūraliuosius skaičius n imtume, visada galima rasti du, kurių skirtumas dalijasi iš 5"?

20.2. Lygiašonio trikampio ABC kampo C laipsninis matas lygus $108°$. Įrodykite, kad šio trikampio pagrindo ir šoninės kraštinės ilgių santykis lygus $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

21.1. Įrodykite, kad yra išraiškos $111\ldots1000\ldots0$ natūralusis skaičius, kuris dalijasi iš nurodyto natūraliojo skaičiaus n.

21.2. Lygiagretainio $ABCD$ $AC=AD\sqrt{2}$. Įrodykite, kad kampas tarp šio lygiagretainio įstrižainių yra lygus kampui tarp jo kraštinių.

22.1. Išspręskite lygtį

$$\overline{(xy)}^2=\overline{(y-1)xxy}.$$

22.2. Kvadrato $ABCD$ kraštinėje CD pažymėtas taškas E. Kampo BAE pusiaukampinė kerta kraštinę BC taške F. Įrodykite, kad $AE=BF+DE$.

23.1. Įrodykite, kad $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0$,

jei $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$.

23.2. Duotos lygios atkarpos AB ir A_1B_1. Taškas S — atkarpos AB vidurys, taškas S_1 — atkarpos A_1B_1 vidurys. Posūkiu, kurio centras M_1, taškas A atvaizduojamas į A_1, taškas B — į B_1. Posūkiu, kurio centras M_2, taškas A atvaizduojamas į B_1, taškas B — į A_1. Įrodykite, kad tiesė M_1M_2 dalija atkarpą SS_1 pusiau.

24.1. Raskite sveikuosius sistemos

$$\begin{cases} 6x-5y+2z=0, \\ 16x-17y+6z=0 \end{cases}$$

sprendinius.

24.2. Trapecijos didesniojo pagrindo vidurys sujungtas su mažesniojo pagrindo galais atkarpomis, kertančiomis įstrižaines taškuose M ir N. Koks turi būti pagrindų ilgių santykis, kad MN įgytų didžiausią reikšmę?

25.1. Išspręskite lygtį

$$x^6-7x^2+\sqrt{6}=0.$$

25.2. Jei M — atkarpos AB vidurio taškas, O — bet kuris plokštumos taškas, tai $\vec{OM}=\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OB})$.

26.1. Įrodykite nelygybę

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\,(n\in N).$$

26.2. Lygiagretainių $ABCD$ ir $AB_1C_1D_1$ viršūnė A bendra. Įrodykite, kad $CC_1\leqslant BB_1+DD_1$.

27.1. Raskite natūraliuosius lygties $x^2-y^2=135$ sprendinius.

27.2. Trikampyje ABC, kurio $CB=a$, $CA=b$, nubrėžta pusiaukampinė CC_1. Įrodykite, kad $\overrightarrow{CC_1}=\frac{a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB}}{a+b}$.

28.1. Dviženklio skaičiaus skaitmenų kvadratų suma lygi 113. Jei prie to dviženklio skaičiaus pridėtume skaičių, parašytą tais pačiais skaitmenimis, bet atvirkščia tvarka, tai gautume 165. Raskite tą dviženklį skaičių.

28.2. Trikampio ABC kraštinėje AB pažymėtas taškas M. Tiesė, einanti per tašką M ir lygiagreti pusiaukraštinei CC_1, kerta tiesę AC taške P, o tiesę BC — taške Q. Įrodykite, kad $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{QM}=2\overrightarrow{CC_1}$.

29.1. Išspręskite lygtį

$4x^4+12x^3+5x^2-6x-15=0$.

29.2. Vektorius $\overrightarrow{OA}$ statmenas vektoriui $\overrightarrow{OB}$, be to, $|\overrightarrow{OA}|=a$, $|\overrightarrow{OB}|=b$. Iš taško O atkarpai AB nubrėžtas statmuo OC. Įrodykite, kad $\overrightarrow{OC}=\frac{a^2\overrightarrow{OB}+b^2\overrightarrow{OA}}{a^2+b^2}$.

30.1. Įrodykite, kad dviejų neneigiamųjų skaičių aritmetinis vidurkis ne mažesnis už jų geometrinį vidurkį, t. y.

$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$, kai $a\geqslant 0$ ir $b\geqslant 0$.

Kada galimas lygybės ženklas?

30.2. Trikampio ABC kraštinės AB ir BC yra jo išorėje nubraižytų kvadratų $ABDE$ ir $BCKF$ kraštinės. Įrodykite, kad atkarpos DF ilgis dvigubai didesnis už trikampio ABC pusiaukraštinės BP ilgį ir abi jos viena kitai statmenos.

31.1. Įrodykite, kad keturių neneigiamųjų skaičių aritmetinis vidurkis ne mažesnis už jų geometrinį vidurkį, t. y.

$\frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd}$, kai $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, $d\geqslant 0$.

Kada galimas lygybės ženklas?

31.2. Jei A, B, C — duotieji taškai, M — jų nustatytos plokštumos taškas, tai vektorius $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$ nepriklauso nuo taško M padėties. Įrodykite. Kur bus taškas M, kai $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$?

32.1. Įrodykite, kad trijų neneigiamųjų skaičių aritmetinis vidurkis ne mažesnis už jų geometrinį vidurkį, t. y.

$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$, kai $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$.

Kada galimas lygybės ženklas?

32.2. Trikampio ABC aukštinių AA_1 ir BB_1 tęsiniuose už viršūnių A ir B atidėtos atkarpos AA_2 ir BB_2, be to, $AA_2=BC$ ir $BB_2=AC$. Įrodykite, kad $CA_2=CB_2$, $CA_2\perp CB_2$.

33.1. Suma $p+(p-1)+(p-2)+\ldots+3+2+1$ — triženklis skaičius, parašytas vienodais skaitmenimis ($p\in N$). Raskite skaičių p.

33.2. Stačiojo trikampio pusiaukraštinės ir aukštinės, išvestų iš stačiojo kampo viršūnės, ilgiai lygūs atitinkamai m ir h. Apskaičiuokite to trikampio stačiojo kampo pusiaukampinės ilgį.

34.1. Sekos (a_n) nariai — visi didėjimo tvarka parašyti natūralieji skaičiai, kuriuos padalijus iš 7, gaunama liekana 1. Raskite pirmųjų penkiolikos sekos narių sumą.

34.2. Trikampio ABC $\angle B=50°$, $\angle C=70°$. Apskaičiuokite trikampio LHC kampus; čia H — ortocentras (trikampio ABC aukštinių susikirtimo taškas), L — į trikampį ABC įbrėžto apskritimo centras.

35.1. Užpildykite lentelę taip, kad kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio skaičiai būtų iš eilės einantys aritmetinės progresijos (nebūtinai tos pačios) nariai.

1			
			6
		6	
	9		

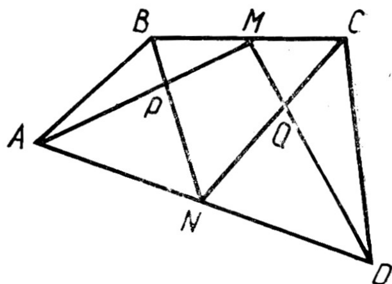
35.2. Trikampio ABC kampas B lygus 36°, kampas C lygus 42°. Kraštinėje BC pažymėtas taškas M, be to, $BM=R$; čia R — apie tą trikampį apibrėžto apskritimo spindulys. Apskaičiuokite kampą MAC.

36.1. Trijų skritulių spindulių ilgiai — iš eilės einantys geometrinės progresijos nariai. Ar sudaro geometrinę progresiją jų apskritimų ilgiai; tų skritulių plotai (apskaičiuoti ta pačia tvarka)?

36.2. $ABCD$ — iškilasis keturkampis. Žinomi šie kampai: $\angle BAC=20°$, $\angle BCA=35°$, $\angle BDC=40°$, $\angle BDA=70°$. Apskaičiuokite kampą tarp šio keturkampio įstrižainių.

37.1. Įrodykite, kad geometrinės progresijos pirmųjų n ($n>1$) narių sumos ir n-tojo nario skirtumo santykis su tos pačios sumos ir pirmojo nario skirtumu lygus skaičiui, atvirkštiniam geometrinės progresijos vardikliui.
37.2. Apskaičiuokite taisyklingosios penkiakampės žvaigždės visų smailiųjų kampų sumą. (Taisyklingąją penkiakampę žvaigždę nubraižysime padaliję apskritimą į penkias lygias dalis ir sujungę atkarpomis kas antrą dalijimo tašką.)

38.1. Raskite visas sveikųjų skaičių x, y poras, tenkinančias nelygybę
$2x^2+2y^2-12x+20y+65<0$.
38.2. M ir N — keturkampio $ABCD$ priešingųjų kraštinių vidurio taškai (12 pav.). Įrodykite, kad keturkampio $MQNP$ plotas lygus trikampių ABP ir CDQ plotų sumai.



12 pav.

39.1. Dviejų duotų dviženklių skaičių visų skaitmenų suma lygi pirmajam iš jų, o tų dviejų dviženklių skaičių suma — pirmojo skaičiaus skaitmenų sumos kvadratui. Raskite duotus skaičius.
39.2. Taškas M — keturkampio $ABCD$ vidaus taškas. Trikampiai AMB, BMC, CMD, DMA lygiapločiai. Ar galima teigti, kad šis keturkampis yra lygiagretainis?

40.1. Kiek yra triženklių skaičių, kurių paskutinis skaitmuo lygus to skaičiaus pirmųjų dviejų skaitmenų sandaugai?
40.2. M ir N — lygiagretainio $ABCD$ kraštinių AB ir AD vidurio taškai. Tiesės DM ir BN susikerta taške P. Kurią lygiagretainio ploto dalį sudaro keturkampio $AMPN$ plotas?

41.1. Jeigu $a^2+ab+ac<0$, tai $b^2>4ac$. Įrodykite.
41.2. Keturkampio $ABCD$ kraštinėse AB ir CD pažymėti taškai M ir N, be to, $MB=\frac{1}{k}AB$, $ND=\frac{1}{k}CD$; $k\neq 0$. Kurią to keturkampio ploto dalį sudaro keturkampio $AMCN$ plotas?

42.1. Įrodykite, kad $\sqrt[3]{n}>\sqrt[4]{n+1}$, $n\geqslant 3$.
42.2. Lygiakraščio trikampio formos žemės sklype nutarta pastatyti namą ir nuo jo iki sklypo kiekvieno krašto nutiesti statmeną kraštui tiesų kelią. Kur reikia pastatyti namą, kad visų kelių ilgių suma būtų mažiausia?

43.1. Su kuriomis a ir b reikšmėmis teisinga nelygybė $a^2+ab+b^2>3(a+b-1)$?

43.2. Kampo, kurį sudaro liestinė ir styga, laipsninis matas lygus lanko, esančio tarp jo kraštinių, laipsninio mato pusei. Įrodykite.

44.1. Apskaičiuokite $f(2)$, žinodami, kad su bet kuriuo $x \neq 0$ teisinga lygybė

$$f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2.$$

44.2. Apskritimai ω_1 ir ω_2 susikerta taškuose A ir B. Per tašką A nubrėžta apskritimo ω_1 liestinė kerta apskritimą ω_2 taške C. Per tašką B nubrėžta apskritimo ω_2 liestinė kerta apskritimą ω_1 taške D. Įrodykite:

1) $AD \parallel BC$; 2) $AB^2=AD \cdot BC$.

45.1. Išspręskite lygtį

$$(x^2+3x-4)^3+(2x^2-5x+3)^3=(3x^2-2x-1)^3.$$

45.2. Trikampio ABC $\angle A=50°$, $\angle C=70°$. Kraštinėje AB pažymėtas taškas D ir kraštinėje BC — taškas F, be to, $\angle DCA = \angle FAC=30°$. Apskaičiuokite $\angle CDF$.

46.1. Įrodykite, kad šiame pavyzdyje yra klaida:

```
   ***27
 ×    **
 -------
  *****6
+*****
 -------
  ****46
```

46.2. Trikampio ABC kraštinėse CA ir CB pažymėti taškai M ir N, be to, $AN=BM=AB$. Atkarpos AN ir BM susikerta taške P. Įrodykite, kad $\angle APM=2\angle ACB$.

47.1. Vienoje iš trijų kortelių užrašytas skaičius 23, antroje — skaičius 79, o trečioje — kažkuris natūralusis dviženklis skaičius. Suma visų šešiaženklių skaičių, kuriuos galima gauti visais galimais būdais išdėliojus tas korteles į vieną eilę, lygi 2 989 896. Kuris skaičius užrašytas trečioje kortelėje?

47.2. Įrodykite, kad trikampis ABC yra statusis lygiašonis, jeigu $R(b+c)=a\sqrt{bc}$; čia a, b, c — trikampio kraštinių ilgiai, R — apibrėžto apskritimo spindulys.

48.1. Suprastinkite reiškinį

$$\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}-2\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

48.2. Trapecijos pagrindai lygūs a ir c, o prie pagrindo a esantys kampai α ir β. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

49.1. Dviejų teigiamųjų skaičių skirtumas 48, o jų aritmetinio ir geometrinio vidurkio skirtumas lygus 18. Raskite tuos skaičius.

49.2. Trikampio plotas lygus $S=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$; čia a ir b trikampio kraštinių ilgis. Raskite trikampio kampus.

50.1. Įrodykite, kad skaičius $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ nėra racionalusis.

50.2. Vieno trikampio kampas α, kito — β, o $\alpha+\beta=180°$. Įrodykite, kad šių trikampių plotai sutinka taip, kaip prie tų kampų esančių kraštinių sandaugos.

51.1. Justas skaičių 1995^{1995} išreiškė kelių dėmenų suma; tuos dėmenis pakėlė kubu ir sudėjo, o sumą padalijo iš 6. Kokią jis gavo liekaną?

51.2. Trikampio ABC kraštinės BC vidurys — taškas L, atkarpos BL vidurys — taškas K. Spinduliuose AK ir AL šalia trikampio ABC atidėtos atkarpos LD ir KF: $LD=AL$, $KF=\frac{1}{3}AK$. Apskaičiuokite trikampio ABC ir keturkampio $KLDF$ plotų santykį.

52.1. Išspręskite lygtį

$x^4+x^2+\sqrt{2}x+2=0$.

52.2. Įrodykite, kad ir koks būtų trikampis ABC, teisinga nelygybė $S\leqslant\frac{b^2+c^2}{4}$;

čia S — trikampio plotas, b ir c — kraštinių ilgis.

53.1. Skaičius n^2+2n ($n\in N$) baigiasi skaitmeniu 4. Pasakykite to skaičiaus priešpaskutinį skaitmenį.

53.2. Trikampio ABC kampas A lygus 60°. Apskaičiuokite kitus jo kampus, kai

$2\cos B-1=\frac{a+b}{a+c}$.

54.1. Koordinačių plokštumoje pažymėkite aibę taškų, kurių koordinatės priklauso reiškinio $\sqrt{2x+6y-x^2-y^2-10}$ apibrėžimo sričiai.

54.2. Apskritimo skersmenyje CD arba jo tęsinyje pažymėtas taškas M. Nubrėžta bet kuri styga AB, lygiagreti skersmeniui CD. Įrodykite, kad suma AM^2+BM^2 pastovi, kai taško M padėtis nesikeičia.

55.1. Ar galima iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6 sudaryti šešiaženklį skaičių, turintį skirtingus skaitmenis ir dalų iš 11?
55.2. Taškas D — lygiašonio trikampio ABC pagrindo AB bet kuris taškas. Įrodykite, kad $CD^2=AC^2-AD\cdot DB$.

56.1. Su kuriais natūraliaisiais n skaičius n^{n-2} yra $(n-2)$-ženklis?
56.2. Trikampio ABC kraštinių ilgis a, b ir c. Taškas D dalija kraštinę BC į dvi atkarpas: $BD=m$ ir $DC=n$, o $AD=d$. Įrodykite, kad $ad^2=b^2m+c^2n-amn$ (Stiuarto formulė).

●
57.1. Dėžutėje buvo 20 vienodos masės tikrų monetų ir 21 netikra moneta. Tikrosios monetos masė nežinoma, o kiekviena netikroji moneta 1 g lengvesnė už tikrąją. Iš dėžutės išimta viena moneta. Vienu svėrimu reikia nustatyti, kokia moneta išimta: tikra ar netikra. Sveriame svarstyklėmis, kurių rodyklė rodo lėkštėse padėtų monetų masių skirtumą.
57.2. Įrodykite, kad įbrėžto į apskritimą iškilojo keturkampio įstrižainių sandauga lygi priešingųjų kraštinių sandaugų sumai (Ptolemėjo teorema).

58.1. Keleivis užtruko kelionėje sveiką dienų skaičių. Kasdien jis nuvažiuodavo tiek kilometrų, kiek iš viso dienų buvo kelionėje. Jei kasdien keleivis nuvažiuotų 10 km ir kas 40 km vieną dieną ilsėtųsi, kelionėje užtruktų 2 dienomis ilgiau. Kiek dienų jis keliavo?
58.2. Kai R — apibrėžto apie statųjį trikampį, o r — įbrėžto į jį apskritimų spinduliai, S — to trikampio plotas, tai teisinga nelygybė $R+r\geqslant\sqrt{2S}$. Įrodykite.

59.1. Išspręskite lygtį
$$\left[\frac{x+1}{3}\right]=\frac{x-1}{2}.$$
59.2. Jei apie trikampį apibrėžtas R spindulio apskritimas ir į jį įbrėžtas r spindulio apskritimas, o d — atstumas tarp tų apskritimų centrų, tai $d^2=R^2-2Rr$ (Eulerio formulė). Įrodykite.

60.1. Išspręskite lygtį
$$\frac{x^2}{x-[x]}=\frac{1}{25}.$$
60.2. Įrodykite nelygybes:
a) $p^2\geqslant 27r^2$; b) $S\leqslant\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$;
čia p — trikampio pusperimetris, r — į trikampį įbrėžto apskritimo spindulys, S — trikampio plotas.

SPRENDIMAI. NURODYMAI. ATSAKYMAI

V—VI KLASĖ

1.1. Turinys lygus atėminio ir skirtumo sumai. Vadinasi, dvigubas turinys yra 120, o turinys — 60. Iš sąlygos žinome, kad skirtumas 24 vienetais mažesnis **už turinį, todėl atėminys lygus 24,** o skirtumas $60-24=36$.

A t s a k y m a s: turinys 60, atėminys 24, skirtumas 36.

1.2. A t s a k y m a s: 72.

2.1. Daiva turėjo mažiau negu 2 ct. Priešingu atveju, pridėjusi Birutės pinigus, būtų galėjusi nusipirkti vieną pieštukų dėžutę. Taigi Daiva turėjo 1 ct ir jai trūko 7 ct. Vadinasi, spalvotų pieštukų dėžutė kainavo 8 ct.

2.2. Mažiausias dviženklis skaičius 10. Ieškomasis skaičius turi $10:(1+4)=2$ dešimtis ir $2\cdot 4=8$ vienetus.

Galima spręsti ir sudarant lygtį $4x+x=10$; čia x — dešimčių skaičius.

A t s a k y m a s: 28.

3.1. Jei dukters amžių laikysime 1 dalimi, tai sūnaus amžius sudarys 2 dalis, o tėvo — 3 dalis. Sūnus jaunesnis už tėvą dukters amžiumi ir, kaip pasakyta sąlygoje, dvidešimčia metų. Vadinasi, dukrai 20 metų, sūnui 40 metų, o tėvui 60 metų.

3.2. Daliklis turi būti didesnis už 7, nes sandauga $7\cdot 97=679$ mažesnė už dalinį. Tiek 8, tiek 9 gali būti dalikliu.

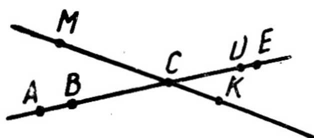
A t s a k y m a s: $696:8=87$ arba $693:9=77$.

4.1. Pakanka, kad penktokai be aiškinimo pateiktų šešis būdus: $3\cdot 26$; $3\cdot 21+5\cdot 3$; $3\cdot 16+5\cdot 6$; $3\cdot 11+5\cdot 9$; $3\cdot 6+5\cdot 12$; $3\cdot 1+5\cdot 15$.

Aukštesniųjų klasių mokiniai spręstų lygtį $3x+5y=78$, iš kurios išsireikštų $x=26-\frac{5y}{3}$, o tada gautų $y=0, 3, 6, 9, 12, 15$.

A t s a k y m a s: šešiais.

4.2. Vienas pažymėtųjų taškų yra tų tiesių susikirtimo taškas C (13 pav.).



13 pav.

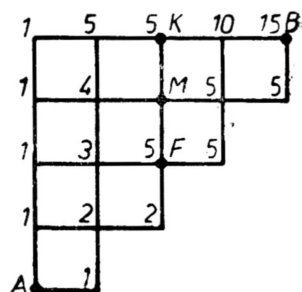
5.1. Berniukų amžiaus skirtumas nesikeičia. Jis lygus 10 metų. Kai Simas bus trigubai vyresnis už Vidą, jų amžiaus skirtumas bus lygus dvigubam Vido amžiui. Taigi Vidas turės 5 metus, o Simas — 15 metų.

5.2. (1) seka yra gauta iš natūraliųjų skaičių eilės sukeitus gretimus narius: lyginiai skaičiai surašyti nelyginių vietoje, o nelyginiai — lyginių.

(2) skaičių seka gauta iš (1) pridėjus prie kiekvieno jos nario 7, o (3) — kiekvieną (1) sekos narį padauginus iš 2.

P a s t a b a. Šio uždavinio, kaip ir V—VI klasės 6.2; 7.2; 8.2; 9.2; 10.2; 16.2 uždavinių, pateikti atsakymai nėra vieninteliai.

6.1. 14 paveiksle parodyta, keliais maršrutais vairuotojas pagal sąlygos reikalavimus gali atvažiuoti į atitinkamą sankryžą. Matome, kad vairuotojas, važiuodamas iš sankryžos A į sankryžą B ir aplenkdamas sankryžą M, būtinai pakliūs arba į K, arba į F. Iš sankryžos A į sankryžą K galima nuvažiuoti penkiais maršrutais; iš A į F — taip pat penkiais; iš K į B — vienu; iš F į B — dviem. Vadinasi, iš viso yra $5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 15$ ieškomų maršrutų.



14 pav.

A t s a k y m a s: 15.

6.2. Fibonačio sekos sudarymo taisyklė tokia: pirmieji du nariai lygūs 1, kiekvienas sekantis lygus dviejų prieš jį esančių narių sumai.

7.1. Kiekvieną iš trijų puskarininkio parinkimo būdų galima derinti su kiekvienu iš šešių kareivio parinkimo būdų. Vadinasi, yra $3 \cdot 6 = 18$ budėtojų grupės sudarymo būdų.

7.2. Pirmos eilutės pirmame langelyje yra skaičius 34, o kiekvienas šios eilutės skaičius trimis didesnis už prieš jį esantį. Kiekvieno stulpelio kiekvienas skaičius vienetu didesnis už prieš jį esantį (arba skaičiai stulpeliuose surašyti iš eilės).

Galima ir kita taisyklė: kiekviename stulpelyje skaičiai surašyti iš eilės didėjimo tvarka, be to, pirmas stulpelis prasideda skaičiumi 34, o kiekvienas kitas — tuo skaičiumi, kuriuo baigiasi prieš jį esantis stulpelis.

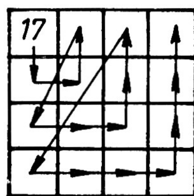
8.1. Jei budėti eitų tik puskarininkis ir kareivis, tai būtų $7 \cdot 20 = 140$ grupės sudarymo būdų (žr. 7.1 uždavinio sprendimą). Kadangi dar turi eiti ir vienas karininkas, tai trijų žmonių budėtojų grupę galima sudaryti $7 \cdot 20 \cdot 5 = 700$ skirtingų būdų.

8.2. a) Šią seką gauname, kiekvieną natūraliųjų skaičių eilės narį padauginę iš jo paties;

b) kiekvieną natūraliųjų skaičių eilės narį padauginę iš 3 ir pridėję 1.

9.1. Sakykime, kad pirmasis „lyginis" šeštadienis buvo x-ąją dieną. Kitas „lyginis" šeštadienis bus tik po dviejų savaičių, t. y. $(x+14)$-ąją to mėnesio dieną, o trečiasis „lyginis" šeštadienis — $(x+28)$-ąją. Bet mėnesis turi ne daugiau kaip 31 dieną, todėl x gali būti tik 2. Iš čia gauname, kad to mėnesio 30-oji buvo šeštadienis, vadinasi, 25-oji — pirmadienis.

9.2. Skaičiai surašyti pradedant 17 iš eilės didėjimo tvarka. Tai parodyta 15, *a*, paveikslе rodyklėmis. Tuščiuose langeliuose reikia parašyti skaičius: 26, 27, 28 29, 30, 31, 32 (15 pav., *b*).



a)

17	20	25	32
18	19	24	31
21	22	23	30
26	27	28	29

b)

15 pav.

10.1. Kas antras mėnesio sekmadienis būna nelyginėmis dienomis. Kadangi trys iš jų buvo „nelyginiai", tai tų metų rugsėjo mėnesį iš viso buvo penki sekmadieniai. Kadangi rugsėjis turi 30 dienų, tai penki sekmadieniai gali būti tik tada, kai pirmasis jų yra 1-ąją arba 2-ąją to mėnesio dieną. Vadinasi, tų metų rugsėjo 1-oji buvo sekmadienis, o 20-oji — penktadienis.

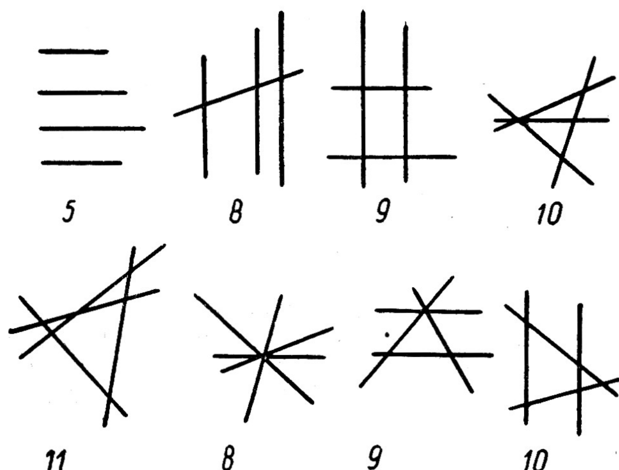
10.2. Norint sužinoti, kuris skaičius turi būti viduriniame langelyje, reikia prie skaičiaus, esančio kairiajame langelyje, skaitmenų sumos pridėti dešiniajame langelyje esančio skaičiaus skaitmenų sumą:

$12+7=19$; $8+3=11$.

Ieškomas skaičius lygus 15, nes $5+10=15$.

11.1. Tik keliamaisiais metais, kai vasario 1-oji yra sekmadienis, vasaris gali turėti 5 sekmadienius. Balandis, birželis, rugsėjis ir lapkritis turi po 30 dienų. Šie mėnesiai turės po 5 sekmadienius, kai 1-oji arba 2-oji mėnesio diena bus sekmadienis. Visi kiti mėnesiai turi po 31 dieną. Jie turės 5 sekmadienius, kai 1-oji, 2-oji arba 3-ioji jų diena bus sekmadienis.

11.2. Atsakymas: 5, 8, 9, 10 ir 11 (16 pav.).



16 pav.

12.1. Sakykime, kad dėžėje yra tik vienas žalias rutuliukas. Tada joje mėlynų rutuliukų būtų 2, raudonų — 4, o visi kiti — 20 — geltoni. Jei dėžėje būtų 2 žali rutuliukai, tai mėlynų, raudonų ir geltonų būtų atitinkamai 4, 8, 13. Tarkime, kad žalių rutuliukų yra ne mažiau kaip 3. Tada mėlynų turi būti ne mažiau kaip 6, o raudonų ne mažiau kaip 12. Vadinasi, geltonų rutuliukų turėtų būti ne daugiau kaip 6, bet tai prieštarauja sąlygai. Uždavinys turi du pirmuosius sprendinius.

Atsakymas: 1 žalias, 2 mėlyni, 4 raudoni ir 20 geltonų rutuliukų arba 2 žali, 4 mėlyni, 8 raudoni ir 13 geltonų rutuliukų.

12.2. Atsakymas: VI+V=XI arba VI+IV=X.

13.1. Norint paimti bent 3 mėlynus pieštukus, reikia paimti 10 pieštukų, nes daugiau kaip 7 raudonų pieštukų būti negali. Toks pieštukų skaičius atitinka ir antrą sąlygą, nes daugiau kaip 5 mėlynų pieštukų būti negali.

Atsakymas: 10 pieštukų.

13.2. Atsakymas: X−IX=I arba V−IV=I.

14.1. Neužtenka paimti 20 batų, nes gali pasitaikyti, kad visi jie tinka tik vienai kojai (pavyzdžiui, dešiniajai). Jei paimtume dar vieną batą, tai jis tiktų tik kairiajai kojai, nes daugiau kaip 20 dešiniosios kojos batų būti negali. Jis su vienu iš tų dvidešimties sudarys tinkamą porą.

Atsakymas: 21 batą.

14.2. Pirmasis skaičius 5. Norint gauti kiekvieną sekantį, reikia prieš jį esantį skaičių padauginti iš 3 ir iš gautos sandaugos atimti 1. Vietoj žvaigždutės reikia parašyti skaičių 365.

15.1. Pirmoje kolonoje „Žigulių" yra daugiau negu antroje. Vadinasi, joje važiuoja ne mažiau kaip šeši šios markės automobiliai. Patikrinę visus variantus, įsitikiname, kad pirmoje kolonoje yra 7 „Žiguliai" ir 21 „Moskvičius". Taigi antroje kolonoje važiuoja 24 „Moskvičiai".

A t s a k y m a s: 21 „Moskvičius", 24 „Moskvičiai".

15.2. A t s a k y m a s: $66+66+66+66=264$.

16.1. Antru indu pasemiame 5 l vandens ir iš jo nupilame į pirmą indą 3 l. Antrame inde lieka 2 l. Iš pirmo indo visą vandenį išpilame ir į jį supilame 2 l iš antro indo. Antru indu pasemiame 5 l vandens ir iš jo 1 l nupilame į pirmą, antrame inde lieka 4 l.

16.2. A t s a k y m a s.

$555+55+55+55+55+55+55+55+55+5$.

17.1. Uždavinį sprendžiame pagal šią pilstymo schemą:

12 kibirų statinė	8 kibirų statinė	5 kibirų statinė
12	—	—
4	8	—
4	3	5
9	3	—
9	—	3
1	8	3
1	6	5
6	6	—

17.2. Penktokams pakanka be aiškinimo pateikti sprendimą $3\cdot9-5\cdot2=$ $=17$.

Aukštesniųjų klasių mokiniai ieškotų mažiausių natūraliųjų skaičių, tenkinančių lygtį $3x-5y=17$.

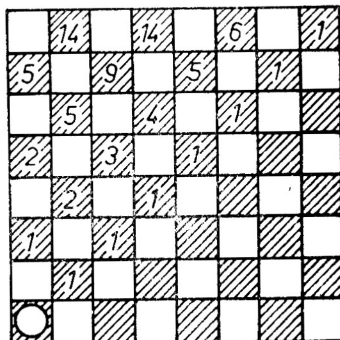
A t s a k y m a s: 9 ir 2.

18.1. Pirmame kurse studentas negalėjo išlaikyti mažiau kaip 3 egzaminus, nes priešingu atveju bendras egzaminų skaičius per penkerius metus būtų mažesnis už 31. Pirmame kurse negalėjo būti keturių arba daugiau egzaminų, nes tada iš viso jis būtų išlaikęs ne mažiau kaip $4+5+6+7+12=34$ egzaminus, t. y. daugiau negu 31. Pirmame kurse studentas turėjo išlaikyti tris egzaminus, penktame — 9. Ketvirtame kurse studentas negalėjo laikyti septynių ar mažiau egzaminų — tada jis būtų jų išlaikęs ne daugiau kaip $9+7+6+5+3=30$. Vadinasi, ketvirtame kurse studentas išlaikė 8 egzaminus.

18.2. Paprasčiausia parašyti šiuos skaičius penkiais stulpeliais taip:

1	2	3	4	5
10	9	8	7	6
11	12	13	14	15
20	19	18	17	16

19.1. 17 paveiksle surašyti skaičiai, kuriuos skaitydami iš apačios į viršų sužinome, keliais būdais šaškė gali patekti į atitinkamą laukelį. Iš viso yra $14+14+6+1=35$ skirtingi būdai.



17 pav.

19.2. Iš kvadratuose parašytų skaičių sandaugos reikia atimti skaičių, parašytą skritulyje:

$5\cdot8-13=27,\ 10\cdot8-7=73.$

Vadinasi, tuščiame trikampyje turi būti 953, nes $41\cdot24-31=953$.

20.1. Išdalykime mokiniams visus kastuvus, o dviem, jų negavusiems, duokime po laužtuvą. Iš sąlygos aišku, kad sandėlyje likę trys įrankiai yra laužtuvai. Vadinasi, sandėlyje buvo 5 laužtuvai.

Jeigu išdalytume mokiniams visus laužtuvus, o vienam, jo negavusiam, duotume kastuvą, tai sandėlyje liktų trys kastuvai. Vadinasi, iš viso sandėlyje buvo 4 kastuvai. Tuomet mokinių skaičius: $5+4-3=6$.

A t s a k y m a s: 6 mokiniai, 4 kastuvai, 5 laužtuvai.

20.2. P i r m a s b ū d a s. Uždavinio sąlygą patogu užsirašyti taip, kaip parodyta 18 paveiksle. Dabar nesunku rasti ieškomus skaitmenis (19 pav.).

+ □ △ ◇ ○ ▽ 9
□ △ ◇ ○ ▽
3 0 6 2 1 6

18 pav.

+ 2 7 8 3 7 9
2 7 8 3 7
3 0 6 2 1 6

19 pav.

A n t r a s b ū d a s. Skaičių, kurį gausime ieškomojo skaičiaus nubraukę skaitmenį 9, pažymėkime x. Sudarykime lygtį $10x+9+$ $+x=306\,216$. Ją išsprendę, gausime $x=27\,837$.

A t s a k y m a s: 278 379.

21.1. Iš sąlygos aišku, kad Vytas ne Jonaitis ir ne Petraitis. Vadinasi, jis Kalvaitis. Linas ne Jonaitis. Taigi jis Petraitis.

A t s a k y m a s: Saulius Jonaitis, Vytas Kalvaitis, Linas Petraitis.

21.2. Eilučių skaičių suma $818+819+917=2554$, o stulpelių — $185+722+648=1555$. Bet kiekviena ši suma turi būti lygi visų devynių skaičių sumai. Vadinasi, jos turi būti vienodos. Taigi mokinys apskaičiavo klaidingai.

22.1. Jei plokštelę supjaustytume į tris dalis, tai 9 g masės daiktą galima būtų pasverti tik taip: vienoje lėkštelėje padedamas tas daiktas, o kitoje — dvi dalys iš trijų. Kadangi $9=1+8=2+7=$ $=3+6=4+5$, tai reikia išnagrinėti tik šiuos rinkinius: 1, 8, 1; 2, 7, 1; 3, 6, 1; 4, 5, 1.

Pirmuoju rinkiniu negalima pasverti 3 g masės daikto, o paskutiniu — 7 g masės daikto. Patikrinę antrą ir trečią rinkinį, įsitikiname, kad juodu atitinka uždavinio sąlygą.

A t s a k y m a s: plokštelės dalių masė 1 g, 2 g, 7 g arba 1 g, 3 g, 6 g.

22.2. Pažymėkime ieškomo skaičiaus dešimtis raide a, o vienetus — raide b. Tuomet $10a+b=7b$. Iš čia $10a=6b$, arba $5a=3b$. Matome, kad b dalijasi iš 5, bet negali būti nulis. Vadinasi, $b=5$. Gauname $5a=15$. Iš čia $a=3$.

A t s a k y m a s: 35.

23.1. Nugalėtoja išaiškėjo po $m-n$ rungtynių. Vadinasi, buvo $m-n$ komandų, iškritusių iš varžybų. Ir tik viena komanda — nugalėtoja — nepatyrė pralaimėjimo. Todėl varžybose dalyvavo $m-n+1$ komanda $(m>n)$.

23.2. Aikštelės perimetras $40\cdot4=160$ m, iš viso įkasta $19\cdot4+4=$ $=80$ stulpelių.

24.1. Už kiekvieną turą abi komandos gauna 4 taškus, todėl abiejų komandų surinktų taškų suma turi dalytis iš 4. Taigi varžybos negalėjo baigtis rezultatu 23 : 20 ir 17 : 17.

Varžybos galėjo baigtis rezultatu 24 : 16 (pavyzdžiui, 7 kartus laimėjo I komanda ir 3 kartus — II komanda) arba rezultatu 17 : 15 (pavyzdžiui, 4 kartus laimėjo I komanda, 3 kartus laimėjo II komanda ir 1 turas baigėsi lygiosiomis).

24.2. P i r m a s b ū d a s. Iš sąlygos aišku, kad

$$\begin{array}{r} B \\ +\,AAAA \\ AAAA \\ \hline B0000 \end{array}$$

Kadangi $B+A+A$ baigiasi nuliu, tai B — lyginis ir $B<3$. Vadinasi, $B=2$.

Sumos $2+A+A$ paskutinis skaitmuo nulis. Darome išvadą, kad $A=9$ (A negali būti lygu 4, nes sudėdami į kiekvieną aukštesnį skyrių perkeliame 2 vienetus).

A n t r a s b ū d a s. Iš sąlygos aišku, kad skaitmenys A ir B nelygūs nuliui ir į kiekvieną aukštesnį skyrių perkeliame B vienetų. Vadinasi, teisinga lygybė $3\cdot A+B=\overline{BA}$. Kadangi sudėjus

keturis vienaženklius skaičius gaunama mažiau negu 40, tai $B<4$. Kai $B=1$ arba $B=3$, nėra tokios A reikšmės, kuri tenkintų lygybę $3\cdot A+B=\overline{BA}$. Ją tenkina tik $B=2$, $A=9$.

Atsakymas:

$$\begin{array}{r} 2 \\ +\;9999 \\ 9999 \\ 9999 \\ \hline 29999 \end{array}$$

25.1. Iš sąlygos žinome, kad traukinys 20 m nuvažiuoja per 2 s. Traukinio priekiniai ratai nuo vieno tilto galo iki kito važiuoja 4 s. Kol traukinys nuvažiuos nuo tilto, praeis dar 2 s. Taigi jis pervažiuos tiltą per 6 s.

25.2. Atsakymas: a) 37; b) 0; 3; c) 0.

26.1. Kiekvienam pirkėjui moteris pardavė pusę turimų obuolių ir dar pusę obuolio. Vadinasi, kiekvieną kartą likdavo vienu obuoliu mažiau negu parduota. Taigi šeštam pirkėjui ji pardavė 1 obuolį, penktam — 2 obuolius. Kai nupirko ketvirtas, liko $1+2=3$ obuoliai. Vadinasi, ketvirtam pirkėjui ji pardavė 4 obuolius. Po trečio pirkėjo liko $1+2+4=7$ obuoliai. Taigi trečiam pirkėjui buvo parduoti 8, antram — 16, pirmam — 32 obuoliai. Iš viso moteris atsinešė į turgų 63 obuolius.

26.2. 3; $3\cdot3=9$; $3\cdot3\cdot3=27$; $3\cdot3\cdot3\cdot3=81$; $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3=243$. Taigi kas keturi dauginamieji sandaugų paskutiniai skaitmenys kartojasi. Kadangi $21=5\cdot4+1$, tai sandauga baigiasi skaitmeniu 3.

27.1. Imkime po 6 kiekvienos vertės varines monetas. Tada būtų $6\cdot4=24$ monetos. Kadangi tarp 24 varinių monetų gali nebūti 7 vienodos vertės, juo labiau jų gali nebūti ir tarp 21 mergaitės turimos monetos.

Atsakymas: gali.

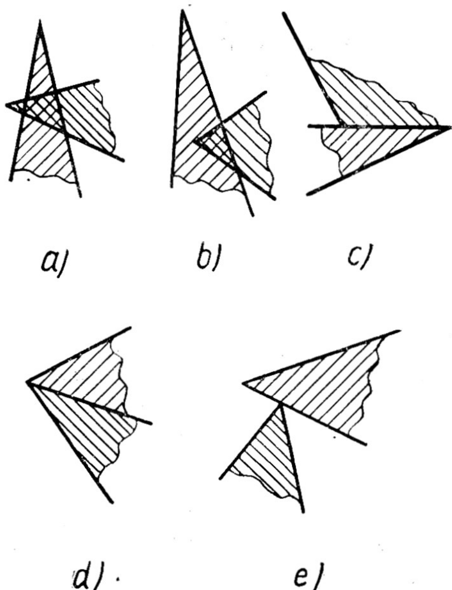
27.2. Parašę skaičius nuo 1 iki 30, turime 9 vienaženklius ir 21 dviženklį skaičių. Vadinasi, duotame skaičiuje $21\cdot2+9=51$ skaitmuo. 16-oje vietoje yra skaitmuo 1, 21-oje vietoje — skaitmuo 5.

28.1. Jeigu Marytė neturėtų 9 vienodos vertės monetų, tai ji turėtų ne daugiau kaip 8 dešimties centų, ne daugiau kaip 8 dvi-

dešimties centų ir ne daugiau kaip 8 penkiasdešimties centų monetas, t. y. ne daugiau kaip 24 monetas. Vadinasi, tarp 25 monetų mažiausiai 9 monetos yra vienodos vertės.

Atsakymas: negali.

28.2. Žr. 20 paveikslą.



20 pav.

29.1. Pagaliukų ilgių suma $4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 53$ (cm). Todėl didžiausio kvadrato, sudaryto iš turimų pagaliukų, kraštinė bus ne ilgesnė už 13 cm. Kvadratą, kurio kraštinės ilgis 13 cm, galima sudaryti iš turimų pagaliukų. Vieną kvadrato kraštinę sudarome iš 4, 4, 2 ir 3 cm ilgio pagaliukų, kitas kraštines — iš tokio ilgio pagaliukų: 4, 4, 3, 1, 1; 4, 3, 3, 2, 1; 3, 3, 3, 2, 2.

29.2. 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15.

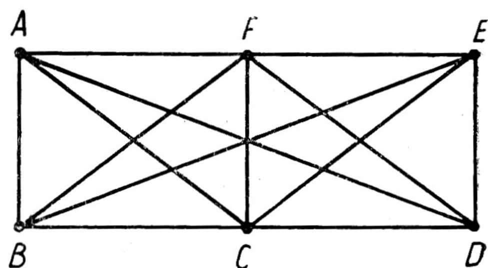
Pavyzdžiui: $3=1+1+1$; $4=1+1+2$; $5=1+2+2$; $6=1+2+3$; $7=1+1+5$; $8=1+2+5$; $9=2+2+5$; $10=2+3+5$; $11=3+3+5$; $12=2+5+5$; $13=3+5+5$; $15=5+5+5$. 14 kp negalima gauti sudėjus tris varines monetas.

30.1. Sakykime, kad tėvo amžiaus pusė yra x metų. Dabar jam $2x$ metų. Lygtis:
$x+12=2x-12$.

Atsakymas: 48 metai.

30.2. Visus taškus pažymėkime raidėmis (21 pav.). Nesunku įsitikinti, kad susidaro trikampiai: *ABC*, *ABD*, *ABE*, *ABF*, *ACD*, *ACE*, *ACF*, *ADE*, *ADF*.

Atsakymas: 9 trikampius.



21 pav.

31.1. Jei neskaičiuotume motociklų su priekabomis, tai aikštelėje būtų iš viso 24 transporto priemonės, kurios turėtų 76 ratus. Jei

šitos 24 transporto priemonės būtų tik motociklai, tai jos turėtų $24 \cdot 2 = 48$ ratus. Automobiliai turi 2 ratais daugiau negu motociklai. Vadinasi, aikštelėje stovi $(76-48):2=14$ lengvųjų automobilių, $24-14=10$ motociklų be priekabų.

Atsakymas: 14 lengvųjų automobilių ir 13 motociklų.

31.2. Sakykime, kad vienetų skaitmuo x, tada dešimčių skaitmuo $3x$. Duotasis skaičius $3x \cdot 10 + x$, o skaičius, gautas skaitmenis sukeitus vietomis, $x \cdot 10 + 3x$. Gauname lygtį $31x - 13x = 36$; $x = 2$.

Atsakymas: 62.

32.1. Šaukštai kainuoja 200 ct, šakutės — 176 ct. Šaukštų yra tiek pat, kiek ir šakučių. Jų skaičius yra 200 ir 176 bendras daliklis, t. y. 2, 4 ir 8. Todėl šaukšto kaina arba 100 ct, arba 50 ct, arba 25 ct. Uždavinio sąlygą atitinka tik paskutinė kaina — 25 ct. Vadinasi, 5 šaukštai kainuoja 1 Lt 25 ct.

32.2. Atsakymas: 48.

33.1. Skaičiuojant dešimtimis, iki pilno dešimčių skaičiaus trūko 2 agurkų. Vadinasi, liko 8 agurkai, kaip ir skaičiuojant tuzinais. Todėl agurkų skaičius (be 8 agurkų) turi dalytis iš 10 ir iš 12, t. y. ir iš 60. Skaičiai 300 ir 360 dalijasi iš 60. Vadinasi, valstietis atvežė 308 arba 368 agurkus.

33.2. Pirmas būdas. Berniuko turimų pinigų suma sudaryta iš 20 nelyginių dėmenų (skaičių 1 ir 5). O lyginio skaičiaus nelyginių dėmenų suma yra lyginė.

Antras būdas. Lygtis $x + 5(20 - x) = 47$ neturi sveikojo sprendinio.

34.1. Atsakymas. 1155; 3150; 4155; 6150; 7155; 9150.

34.2. 1) $80 \cdot 3 = 240$ (ct) — pietų kaina;
2) $240:(3+5) = 30$ (ct) — vienos žuvies kaina;
3) $30 \cdot 3 = 90$ (ct) — pirmo žvejo trijų žuvų kaina;
4) $90 - 80 = 10$ (ct) — turi gauti pirmas žvejys;
5) $30 \cdot 5 - 80 = 70$ (ct) — turi gauti antras žvejys.

35.1. Sakykime, kad mažesnysis skaičius yra x, tada didesnysis $5x$. Sudarome lygtį:

$$x + 5x = 180,$$
$$x = 30,$$
$$5x = 150.$$

Atsakymas: 30 ir 150.

35.2. Pirmas būdas. Kiekvieną skaičių padalijęs iš 10, galime gauti vieną iš šių liekanų: 0, 1, 2, 3, ..., 9. Todėl iš 11

skaičių yra du, kuriuos padalijus iš 10, gaunamos lygios liekanos, o jų skirtumas dalijasi iš 10.

Antras būdas. Iš 11 skaičių yra du, kurie baigiasi tuo pačiu skaitmeniu (nes skaitmenų yra tik 10). Tokių skaičių skirtumas dalijasi iš 10.

36.1. Tarkime, kad šeimoje auga x mergaičių, tada berniukų yra $x+1$ arba $2(x-1)$. Sudarome lygtį

$x+1=2(x-1)$,

$x=3$.

Atsakymas: 3 seserys ir 4 broliai.

36.2. Išbraukus nurodytus skaičius, kiekvienoje dešimtyje lieka penki skaičiai. Bet nuo 1 iki 252 surašyti skaičiai sudaro 25 dešimtis ir dar du skaičius: 251 ir 252. Vadinasi, liko $5 \cdot 25+1=126$ skaičiai.

37.1. Slidžių poros kaina dalijasi iš 3 ir iš 5, vadinasi, ir iš 15. Mokėdamas kiekvienus 15 rublių, Petras padavė į kasą penkis, o Kazys — tris banknotus. Vadinasi, abu padavė į kasą tokį banknotų skaičių, kuris yra aštuonių kartotinis. Iš sąlygos žinome, kad iš abiejų kasininkė gavo mažiau negu 10 banknotų. Vadinasi, jie padavė 8 banknotus. Taigi slidės kainuoja 15 rublių.

37.2. Atsakymas:

a) 1 023 467 895;

b) 1 234 567 980.

38.1. Pirmiausia nesunkiai apskaičiuojame, kad sūnui dabar 10, o tėvui 40 metų. Sakykime, kad po x metų tėvas bus trigubai vyresnis už sūnų. Sudarome lygtį $(10+x) \cdot 3=40+x$.

Atsakymas: po 5 metų.

38.2. $\overline{AB} \cdot A=\overline{CCC}=C \cdot 3 \cdot 37$. Kadangi A nesidalija iš 37, tai $\overline{AB}$ dalijasi. Taigi $\overline{AB}=37$ arba $\overline{AB}=2 \cdot 37=74$. Tinka tik pirmas variantas. Vadinasi, $A=3$, $B=7$, $C=1$.

Atsakymas: $37 \cdot 3=111$.

39.1. Sakykime, kad dabar sūnui x metų, tada tėvui $4x$ metų. Po 20 metų jų amžius bus atitinkamai $x+20$ metų ir $4x+20$ metų. Sudarome lygtį $4x+20=2 \cdot (x+20)$.

Atsakymas: 40 metų.

39.2. Iš sąlygos aišku, kad pilnų šimtų skaičius dalijasi iš 53. Vadinasi, tik du paskutiniai skaitmenys sudaro skaičių, kurį padalijus iš 53, gaunama liekana. Toks dviženklis skaičius yra 48, nes tik jį padalijus iš 53, liekana yra 48. Taigi nubrauktas dešimčių skaitmuo 4 ir vienetų skaitmuo 8.

40.1. Jei iš pirmo pakelio į antrąjį perdėtume 2 sąsiuvinius, tai antrame būtų $30:3=10$ sąsiuvinių. Vadinasi, antrame pakelyje buvo 8 sąsiuviniai, o pirmame — 22.

Uždavinį galima spręsti ir sudarant lygtį $x-2=(30-x+2)\cdot 2$.

A t s a k y m a s: 22 ir 8 sąsiuviniai.

40.2. a) $10\,000-9999=1$;

b) Vienas ieškomųjų skaičių turi būti lyginis, o kitas — nelyginis. Vienas dėmuo turi būti mažesnis už $2000:2=1000$, bet didesnis už $1996:2=998$. Taigi $998+999$ (arba $999+998$).

41.1. Sudarome lygtį $5x=(24-x)\cdot 3$.

A t s a k y m a s: 9 ir 15 svarsčių.

41.2. $1\text{ m}^3=1\,000\,000\,000\text{ mm}^3$;
$1\,000\,000\,000\text{ mm}=1000\text{ km}$.
Vadinasi, iš tų kubelių būtų galima sudėti 1000 km aukščio bokštą.

A t s a k y m a s: užteks.

42.1. Sakykime, kad pirmas iš šešių dėmenų lygus a, antras — b. Tuomet trečias, ketvirtas, penktas ir šeštas dėmenys bus atitinkamai lygūs $a+b$, $a+2b$, $2a+3b$, $3a+5b$. Visų šešių skaičių suma $a+b+(a+b)+(a+2b)+(2a+3b)+(3a+5b)=8a+12b=$ $=4(2a+3b)$, t. y. lygi keturgubam penktajam dėmeniui. Jei yra žinoma šešių tokių skaičių suma, tai, padalijus ją iš 4, gaunamas penktas skaičius.

42.2. A t s a k y m a s:
a) $4\cdot 12+18:(6+3)=50$;
b) $4\cdot(12+18:6+3)=72$.

43.1. Visų 11 futbolininkų metų suma $22\cdot 11=242$, o aikštėje likusių 10 žaidėjų — $21\cdot 10=210$. Iš aikštės išėjo $242-210=32$ metų futbolininkas.

43.2. $((x+5):3\cdot 4-6):7=2$,
$x=10$.

A t s a k y m a s: 10.

44.1. P a v y z d y s. Pirmoje lysvėje mergaitė pasodino tulpių tris kartus daugiau negu antroje. Pirmoje lysvėje neišdygo 2 tulpės, o antroje — 5. Kiek tulpių pasodino mergaitė antroje lysvėje, jeigu pirmoje lysvėje jų išdygo 4 kartus daugiau negu antroje? Išsprendę lygtį $4(x-5)=3x-2$, gauname $x=18$.

44.2. A t s a k y m a s: 210.

45.1. Iš keturių maišelių Birutė išėmė $4\cdot 9=36$ saldainius — tiek, kiek jų iš pradžių buvo trijuose maišeliuose. Vadinasi, kiekviename maišelyje iš pradžių buvo $36:3=12$ saldainių.

45.2. A t s a k y m a s: 37.

46.1. Sakykime, kad tie skaičiai yra x; $x+0{,}4$; $x+0{,}8$; $x+1{,}2$; $x+1{,}6$; $x+2$. Iš sąlygos žinome, kad
$(x+x+0{,}4+x+0{,}8+x+1{,}2+x+1{,}6+x+2):6=3$,
$(6x+6):6=3$,
$6x+6=18$,
$x=2$.
A t s a k y m a s: 2; 2,4; 2,8; 3,2; 3,6; 4.
46.2. Metrinių rąstelių norimą kiekį gausime perpjovę 6 m ilgio rąstus $42:6\cdot5=35$ kartus, o 7 m rąstus — $42:7\cdot6=36$ kartus. Vadinasi, naudingiau pjaustyti 6 m ilgio rąstus.
A t s a k y m a s: 6 m.

47.1. Ketvirtasis skaičius lygus aritmetiniam vidurkiui, t. y. 6,6. 7,2; 7; 6,8; 6,6; 6,4; 6,2; 6 — ieškomi skaičiai.
47.2. A t s a k y m a s: a) 4; b) 3; c) 4.

48.1. Pirmiausia visą cukrų supilame į abi svarstyklių lėkšteles taip, kad svarstyklės būtų pusiausviros. Tuomet lėkštelėse bus po 4 kg cukraus. Paimame 4 kg cukraus iš vienos lėkštelės ir antru svėrimu vėl jį supilame po lygiai į abi lėkšteles. Dabar jose bus po 2 kg cukraus. 1 kg cukraus gausime trečiu svėrimu analogiškai dalydami pusiau 2 kg cukraus.
48.2. Dviejų skaičių, vienodai nutolusių nuo skaičių eilutės pradžios ir pabaigos, suma 51. Tokių porų yra 25. Vadinasi, suma lygi $51\cdot25=1275$.

49.1. 1) Vanduo, pripiltas iki pusės statinės, sveria $60-35=25$ (kg).
2) Statinėje telpantis vanduo sveria $25\cdot2=50$ (kg).
3) Statinė sveria $35-25=10$ (kg).
A t s a k y m a s: 10 kg; 50 kg.
49.2. Matome, kad $99{,}9-99{,}8=99{,}7-99{,}6=\ldots=0{,}1$. Tokių porų turime $50\cdot5=250$. Iš čia $250\cdot0{,}1=25$.
A t s a k y m a s: 25.

50.1. $\frac{3}{4}$ statinės užimantis vanduo sveria $50-20=30$ (kg), tuomet $\frac{1}{4}$ statinės užimantis vanduo sveria $30:3=10$ (kg). Statinė sveria $20-10=10$ (kg). Statinėje telpantis vanduo sveria $50-10=40$ (kg).
A t s a k y m a s: 10 kg; 40 kg.
50.2. $3{,}4m+12{,}1+2{,}8p+3{,}7m+2{,}1+4{,}3p=7{,}1m+7{,}1p+14{,}2=7{,}1(m+p+2)=7{,}1\cdot10=71$.

51.1. 2 kg svogūnų, 12 kg bulvių ir 4 kg agurkų kartu kainuoja $2{,}38\cdot4=9{,}52$ (Lt). Taigi 12 kg bulvių kainuoja $9{,}52-8{,}20=$

$=1{,}32$ (Lt), o 2 kg bulvių — $1{,}32:6=0{,}22$ (Lt). Sužinome, kad 1 kg svogūnų, 2 kg bulvių ir 2 kg agurkų kartu kainuoja $8{,}20:2+$ $+0{,}22=4{,}32$ (Lt).

51.2. Veiksmo ženklas — sudėties, nes šitaip parašytus tris skaičius galima tik sudėti. Pirmo dėmens tūkstantųjų skaitmuo turi būti 5 (kad sumos paskutinis skaitmuo būtų 7, prie 12 reikia pridėti 5). Antro dėmens šimtųjų skaitmuo turi būti 7, nes prie 12 pridėjus 7 paskutinis sumos skaitmuo 9. Pirmo dėmens dešimtųjų skaitmuo turi būti 4, nes prie 10 pridėjus 4 paskutinis sumos skaitmuo yra 4. Sumos vienetų skaitmuo 1, nes $1+3+8+$ $+9=21$, ir t. t.

$$\begin{array}{r} 123{,}475 \\ +\,348{,}274 \\ 259{,}748 \\ \hline 731{,}497 \end{array}$$

52.1. $(x+10x):2=159{,}5$.

A t s a k y m a s: 290; 29.

52.2. Taip parašytus skaičius galima sudėti arba atimti. Šiuo atveju gali būti tik atimties ženklas, nes veiksmo rezultatas neturi šimtų. Toliau aiškinama panašiai, kaip sprendžiant 51.2 V—VI klasės uždavinį.

$$\begin{array}{r} 305{,}678 \\ -\,208{,}789 \\ \hline 96{,}889 \end{array}$$

53.1. $96:3=32$ (m/s) — abiejų traukinių greičių suma, 32 m/s$=$ $=\frac{32\cdot 3600}{1000}$ km/h$=115{,}2$ km/h.

$115{,}2-40=75{,}2$ (km/h) — traukinio greitis.

53.2. Aišku, kad atliekama daugyba. Iš karto galima rasti pirmą dauginamąjį: $235\,038:3=78\,346$. Antro dauginamojo vienetų skaitmuo gali būti 1 arba 6. Bet, padauginę 6 iš pirmo dauginamojo, gautume šešiaženklę sandaugą. Vadinasi, antro dauginamojo paskutinis skaitmuo gali būti tik 1.

$$\begin{array}{r} \times\,78346 \\ 341 \\ \hline 78346 \\ +\,313384 \\ 235038 \\ \hline 26715986 \end{array}$$

54.1. 1) $15\cdot 4=60$ (km) — pirmasis keliavo dviračiu.

2) Kadangi traukinys važiuoja dvigubai greičiau už automobilį, tai pirmas vaikinas per 6 h automobiliu nuvažiavo tokį pat atstu-

mą, kokį antrasis per 3 h traukiniu. Abu vaikinai įveikė tą patį atstumą (nuo A iki B). Vadinasi, kiek pirmasis nuvažiavo dviračiu (60 km), tiek antrasis — automobiliu.
$60 : 1{,}2 = 50$ (km/h) — automobilio greitis.
3) $60 + 50 \cdot 6 = 360$ (km) — atstumas nuo A iki B.
Galima spręsti sudarant lygtį:
$60 + 6x = 6x + 1{,}2x$; čia x — automobilio greitis.

Atsakymas: 360 km.

54.2. Atsakymas: 0,009.

55.1. $25\ \text{m/s} = \frac{25 \cdot 3600}{1000}\ \text{km/h} = 90\ \text{km/h}$ — traukinio greitis.
$60 + 90 = 150$ (km/h) — autobuso ir traukinio greičių suma. Lėktuvo greitį pažymėję x, sudarome lygtį:

$(x : 8) \cdot 3 = 150$;
$x = 400$.

Atsakymas: 400 km/h.

55.2. Atsakymas: 67,23.

56.1. Kai mergaitės gauna po 2 saldainius, o berniukai po 1, galimi keturi atvejai:

$$1 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 10,$$
$$2 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 10,$$
$$3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 10,$$
$$4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 10.$$

Kai mergaitės gauna po 4 saldainius, o berniukai po 2, galimi du atvejai:

$$1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 10,$$
$$2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 10.$$

Atsakymas: 1 mergaitė ir 8 berniukai, 2 mergaitės ir 6 berniukai, 3 mergaitės ir 4 berniukai, 4 mergaitės ir 2 berniukai, 1 mergaitė ir 3 berniukai, 2 mergaitės ir 1 berniukas.

56.2. Dešinioji lygybės pusė yra dviejų vienaženklių skaičių suma. Tokia suma gali būti vienaženklė arba dviženklė. Lygybės kairioji pusė (dviženklio ir vienaženklio skaičiaus sandauga) gali būti dviženklė arba triženklė. Vadinasi, atlikę veiksmus abiejose lygybės pusėse, turime gauti dviženklius skaičius. Savaime aišku, kad sumos antrasis dėmuo yra 9. Taigi dviženklio ir vienaženklio skaičiaus sandauga lygi 10. Tai būna tik tada, kai dauginamieji yra 10 ir 1. Negalime imti -10 ir -1, nes lygybėje vietoj žvaigždučių rašomi skaitmenys.

Vadinasi, $10 \cdot 1 = 1 + 9$.

57.1. Žengęs 5 žingsnius, berniukas pajudėtų į priekį tik per vieną žingsnį. Kadangi 238=47·5+3, tai iš viso į priekį jis pajudėtų per 47+3=50 žingsnių.

A t s a k y m a s: 50 žingsnių.

57.2. Ant svarstyklių lėkštelių padedama po tris žiedus, trys atidedami. Kuri lėkštelė pakyla, ant tos lengvesnis žiedas. Antrą kartą sveriami tie trys žiedai, kurių vienas lengvesnis. Tada po vieną šių žiedų dedama ant lėkštelių, vienas atidedamas. Jei svarstyklės pusiausviros, lengvesnis žiedas yra atidėtasis, o jei viena lėkštelė pakyla, tai ant jos yra lengvesnis žiedas.

Jei sveriant pirmą kartą svarstyklės pusiausviros, lengvesnis žiedas yra tarp trijų atidėtų. Antram svėrimui dabar imami šie trys atidėtieji žiedai ir nurodytu būdu surandamas lengvesnis.

58.1. 1990=268·8+6;
1992=249·8.

Pirmu atveju Gediminas į priekį pajudėtų per 248·2+(5−1)= =500 žingsnelių, o antru atveju — per 249·2=498 žingsnelius.

A t s a k y m a s: 1990 žingsnelių.

58.2. 1) Ant lėkštelių dedama po 9 monetas. Lieka 8. Jei viena lėkštelė pakyla, reikia imti ant kitos lėkštelės esančias monetas, o jei ne,— atidėtąsias 8 monetas.

2) Ant lėkštelių dedama po 3 monetas; lieka 3 (2) monetos.

3) Ant lėkštelių dedama po 1 monetą.

59.1. 1) (8+16):(7−5)=12 (km/h) — raitelio greitis;

2) (12·5+8)·2=136 (km) — viso kelio ilgis.

A t s a k y m a s: 136 km.

59.2. Ant lėkštelių dedama po 5 monetas, 5 atidedamos.

Jei viena lėkštelė nusveria kitą, tai atidėtos 5 monetos yra tikros. Antru svėrimu palyginama penkių tikrų monetų masė su mase penkių monetų, kurios nusvėrė lėkštelę. Dabar svarstyklės gali būti arba pusiausviros, arba vėl nusverti ta pati lėkštelė. Kai svarstyklės pusiausviros, tai netikra moneta yra lengvesnė už kitas monetas; kai lėkštelė nusveria penkias tikrąsias monetas, tai netikra moneta yra sunkesnė už kitas.

Jei pirmą kartą sveriant svarstyklės pusiausviros, tai netikra moneta tarp penkių atidėtų, o ant svarstyklių visos monetos tikros. Tada reikia palyginti penkių atidėtų monetų masę su penkių tikrųjų monetų mase.

60.1. Pirmame maišelyje likę 6 obuoliai sudaro $\frac{3}{4}$ ten buvusių obuolių. Taigi $\frac{1}{4}$ tenka $6:3=2$ obuoliai. Pirmame maišelyje yra $2\cdot4=8$ obuoliai, o antrame $12-8=4$ obuoliai.

A t s a k y m a s: 8 obuoliai, 4 obuoliai.

60.2. Benzino pilstymo schema:

Statinė	Kibiras	Bidonas
a	—	—
$a-5$	—	5
$a-5$	5	—
$a-10$	5	5
$a-10$	9	1
$a-1$	—	1
$a-1$	1	—
$a-6$	1	5
$a-6$	6	—

61.1. $(x\cdot2,5+1,75):0,8=37,5$.
$x=11,3$.

A t s a k y m a s: 11,3.

61.2. Dviejų dviženklių skaičių suma yra mažesnė už 200. Taigi $C=1$, o suma 111. Kadangi abu dėmenys prasideda tuo pačiu skaitmeniu, o suma triženklė, tai dėmenys turi būti didesni už 50 ir, sprendžiant pagal sumą, mažesni už 60. Vadinasi, vienas dėmuo 55, o kitas 56.

$$55+56=111.$$

A t s a k y m a s: $A=5$, $B=6$, $C=1$.

62.1. 1) $2\cdot2\cdot6=24$ (cm^2) — kubo, kurio briauna 2 cm, paviršiaus plotas.

2) $6\cdot6\cdot6=216$ (cm^2) — kubo, kurio briauna 6 cm, paviršiaus plotas.

3) $216:24=9$ (g) — tiek dažų reikės didesniajam kubui nudažyti.

62.2. Iš viso parašyta $51\cdot2+9=111$ skaitmenų. Išbraukę 100 skaitmenų, gausime skaičių, turintį 11 skaitmenų. Jis bus mažiausias, jei prasidės nuliais. Išbraukus visus skaitmenis, išskyrus nulius, iki 51, gaunamas mažiausias skaičius tik tada, kai jis bus 00 000 123 450 (priekyje esantys nuliai neturi reikšmės).

A t s a k y m a s: 123 450.

63.1. Pirmą kartą perlaužta šokolado plytelė padalijama į dvi dalis, antrą kartą — į tris, trečią — į keturias ir t. t. Vadinasi, po kiekvieno laužimo plytelės dalių skaičius padidėja vienetu. Norėdami gauti 40 šokolado plytelės dalių, turėsime laužti 39 kartus.

Siūlome vieną konkretų šokolado plytelės laužymo būdą. Perlaužę 4 kartus, šokoladą padalijame į 5 juosteles, kurių kiekviena turi 8 dalis. Vieną tokią juostelę padalijame į 8 dalis laužydami 7 kartus. Vadinasi, plytelę padalysime į norimą dalių skaičių laužydami $4+5\cdot7=39$ kartus.

Atsakymas: 39 kartus.

63.2. Vienaženklių skaičių yra 9, dviženklių — 90, triženklių — 900. Jiems parašyti reikia atitinkamai 9, 180, 2700 skaitmenų. Vadinasi, skaičius, turintis ieškomą skaitmenį, bus triženklis. Visus vienaženklius ir dviženklius skaičius parašysime $9+180=$ $=189$ skaitmenimis. Taigi triženkliai skaičiai parašomi $1001-$ $-189=812$ skaitmenimis. Bet $812=3\cdot270+2$. Ieškomas skaitmuo yra 271-ojo triženklio skaičiaus antroje vietoje. Toks skaičius yra $99+271=370$, o ieškomas skaitmuo yra 7.

64.1. 1) $0{,}5\cdot0{,}5\cdot0{,}5=0{,}125$ (cm^3) — tūris kubo, kurio briauna 0,5 cm.

2) $1{,}1:0{,}125=8{,}8$ (g) — 1 cm^3 vario masė.

3) $80\cdot80\cdot80=512\,000$ (cm^3) — tūris kubo, kurio briauna 800 mm.

4) $512\,000\cdot8{,}8=4\,505\,600$ g$\approx4{,}5$ t — masė kubo, kurio briauna 800 mm.

64.2. $2\cdot12-3\cdot7=3$, t. y. žiogas gali patekti į tašką A, nušokdamas du 12 cm ilgio šuoliukus OA kryptimi ir tris 7 cm ilgio šuoliukus AO kryptimi.

65.1. Sakykime, kad po x h atstumas tarp jų bus lygus 38,1 km, o upės tėkmės greitis v km/h.

$$(25{,}4-v)\cdot x+vx=38{,}1,$$
$$x=1{,}5.$$

Atsakymas: po 1,5 h.

65.2. Dabar laikrodis rodo $14-5=9$ (h).

$$1991=24\cdot82+23.$$

Po 1991 minutinės rodyklės apsisukimo laikrodis rodys

$$9+23-24=8 \text{ (h)}.$$

Atsakymas: 8 valandą.

66.1. Sakykime, kad patenkinamai mokosi x berniukų, tuomet gerai mokosi $(16-x)$ berniukų. Pagal sąlygą klasėje yra x gerai besimokančių mergaičių. Taigi iš viso klasėje gerai mokosi $16-$ $-x+x=16$ mokinių.

Atsakymas: 16 mokinių.

66.2. Išsiaiškinti žaidimą papraščiausia nuo galo. Pradedantysis laimės, jei varžovas turės imti degtukus tada, kai ant stalo jų bus tik 4. Kad ir kiek iš tų keturių varžovas paimtų, pradedantysis po to paims visus likusius. Kitas „pralaimintis“ skaičius yra 8. Kad ir kiek iš 8 paimtų varžovas, pradedantysis po to paima tiek degtukų, kad ant stalo liktų 4.

Šitaip nustatome, kad „pralaimintys“ skaičiai yra 12, 16, 20, 24.

Pradedantysis visada šį žaidimą laimės, jei žais taip: pirmą kartą paims vieną degtuką, o paskui kiekvieną kartą — po tiek degtukų, kad ant stalo jų liktų 20, 16, 12, 8, 4.

67.1. Pirmiems 9 puslapiams sunumeruoti reikia 9 skaitmenų. Po jų einantiems 90 puslapių — $90 \cdot 2 = 180$ skaitmenų. Triženkliais skaičiais pažymėtų puslapių yra $710 - 9 - 90 = 611$. Jų numeracijai reikėjo $611 \cdot 3 = 1833$ skaitmenų. Taigi knyga sunumeruota $9 + 180 + 1833 = 2022$ skaitmenimis.

67.2. Pradėkime aiškintis nuo galo. Laimi tas, kuris pasako skaičių 66. Vadinasi, žaidėjas, kuris pasakys bet kurį iš skaičių 57, 58, ..., 64, 65, pralaimės, nes jo varžovas po to iš karto galės pasakyti 66. Kitas iš eilės „laimintis“ skaičius yra 56, nes jis priverčia varžovą pasakyti vieną iš nurodytų „pralaiminčiųjų“ skaičių.

Skaičiai 47, 48, ..., 55 — „pralaimintieji“, 46 — „laimintis“ ir t. t. Taigi „laimintys“ skaičiai yra šie: 66, 56, 46, 36, 26, 16, 6. Pradedantysis laimi, jei iš karto sako 6 ir po to — tik „laiminčius“ skaičius.

68.1. Pirmiems 9 puslapiams sunumeruoti reikia 9 skaitmenų.

Puslapiams nuo 10 iki 99 sunumeruoti $90 \cdot 2 = 180$ skaitmenų.

Puslapiams nuo 100 iki 999 sunumeruoti $900 \cdot 3 = 2700$ skaitmenų.

$6869 - (9 + 180 + 2700) = 3980$ skaitmenų prireikė puslapiams sunumeruoti keturženkliais skaičiais.

Vadinasi, keturženkliais skaičiais pažymėti $3980 : 4 = 995$ puslapiai.

Iš viso žodyne yra $9 + 90 + 900 + 995 = 1994$ puslapiai.

68.2. Tarkime, kad kiekvieną mėnesį ne daugiau kaip trys klasės mokiniai švenčia savo gimimo dieną. Tuomet klasėje būtų ne daugiau kaip $3 \cdot 12 = 36$ mokiniai. Gavome prieštarą (klasėje yra 37 mokiniai). Vadinasi, bent vieną mėnesį yra gimę ne mažiau kaip keturi klasės mokiniai.

69.1. Pagal sąlygą: prie dviženklio skaičiaus pridėjus 3, gaunamas triženklis skaičius. Todėl dviženklis skaičius turi būti didesnis už 96. Vadinasi, ieškomas lyginis dviženklis skaičius yra 98. Tada triženklis skaičius $98+3=101$.

Atsakymas: 101; 98.

69.2. Sakykime, kad Algio atsakymas neteisingas. Tada visi kiti atsakymai teisingi, taigi Jonas buvo pirmas, o Giedrius paskutinis. Taigi Algis nebuvo nei pirmas, nei paskutinis. Gavome prieštarą. Vadinasi, Algis sakė tiesą.

Sakykime, kad Beno atsakymas neteisingas, tuomet jis buvo paskutinis. Giedrius sakė tiesą, vadinasi, buvo paskutinis. Vėl gavome prieštarą. Taigi ir Beno atsakymas teisingas.

Sakykime, kad Jonas sakė netiesą, o visi kiti — tiesą. Tuomet Algis turi būti antras arba trečias. Benas — pirmas, antras arba trečias. Jonas — antras, trečias arba ketvirtas, o Giedrius — ketvirtas. Prieštaravimo nėra. Be to, matome, kad pirmas gali būti tik Benas.

Dar reikia patikrinti, kurie atsakymai būtų teisingi, jei manytume, kad Giedrius sakė netiesą. Šiuo atveju visi kiti sakytų tiesą ir niekas neužimtų paskutinės vietos. To negali būti. Taigi Giedrius sakė tiesą. Įrodėme, kad neteisingas Jono atsakymas, o pirmas buvo Benas.

70.1. 1 ha $=10\,000$ $m^2=1\,000\,000$ dm^2.
Vadinasi, 1 dm^2 dugno ploto tenka 1 l vandens. Bet 1 l $=1$ dm^3. Taigi vandens gylis yra tik 1 dm. Savaime aišku, kad tokiame baseine negalima plaukti.

70.2. a) $-5;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;$
b) $-7;\ -6;\ -5;\ -4;\ -3;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;$
c) $\ldots;\ -9;\ -8;\ -7;\ -6;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ \ldots.$

71.1. $63:9=7$ (km/h) — turistų greičių suma. Jei pirmo turisto greitis x km/h, tai antrojo $(7-x)$ km/h. Jeigu pirmas eitų 1,5 karto sparčiau, tai jo greitis būtų lygus $1{,}5x$ km/h, o jei antras eitų 2 kartus sparčiau, tai jo greitis būtų $2(7-x)$ km/h. Tada jų greičių suma būtų $63:5{,}25=12$ (km/h). Sudarome lygtį:

$$1{,}5x+2(7-x)=12,$$
$$x=4.$$

Atsakymas: 4 km/h, 3 km/h.

71.2. a) Neturi sprendinių.
b) $2x-1=5$, arba $2x-1=-5$,
$x=3$ $\qquad x=-2$.

Atsakymas: a) neturi sprendinių; b) -2; 3.

72.1. Pirmiausia skaičių 864 išskaidome pirminiais dauginamaisiais $864=2^5\cdot 3^3$. Dalikliai sudaromi imant dvejetų laipsnius ir trejetų laipsnius. Dvejetų laipsnius galima pasirinkti šešiais būdais (rodikliai 0, 1, 2, 3, 4, 5), o trejetų laipsnius — keturiais (0, 1, 2, 3). Skaičius 864 iš viso turi $6\cdot 4=24$ daliklius. Juos galima surasti taip. Apskaičiavę dvejetų ir trejetų nurodytus laipsnius, parašome dvi grupes skirtingų daliklių: 1, 2, 4, 8, 16, 32 ir 3, 9, 27. Dabar kiekvieną vienos grupės daliklį padauginame iš kiekvieno kitos grupės daliklio. (Kad dalikliai nesikartotų, nedauginame iš vieneto.) Gauname dar 15 daliklių: 6, 12, 24, 48, 96; 18, 36, 72, 144, 288; 54, 108, 216, 432, 864.

A t s a k y m a s: 24 daliklius; 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 32, 36, 48, 54, 72, 96, 108, 144, 216, 288, 432, 864.

72.2. Tą skaičių galima parašyti taip: $84\cdot x+56$; čia x — dalmuo. Ir 84, ir 56 dalijasi iš 28. Kadangi abu sumos dėmenys dalijasi iš 28, tai ir suma (nurodytas skaičius) dalijasi iš 28.

73.1. Remiamės sandaugos taisykle, kurią taikėme spręsdami 72.1 uždavinį. 12 galima išreikšti natūraliųjų skaičių sandauga tik šitaip: $12=6\cdot 2=4\cdot 3=3\cdot 2\cdot 2$. Kadangi ieškome mažiausio sąlygą tenkinančio skaičiaus, užtenka patikrinti šiuos skaičių skaidinius pirminiais dauginamaisiais: 2^{11}, $2^5\cdot 3$, $2^3\cdot 3^2$, $2^2\cdot 3\cdot 5$. Iš jų mažiausias $2^2\cdot 3\cdot 5=60$.

A t s a k y m a s: 60.

73.2. P i r m a s b ū d a s. Sakykime, kad pradinio šešiaženklio skaičiaus paskutiniai penki skaitmenys sudaro skaičių x. Tuomet

$$500\,000+x=4(10x+5);$$
$$x=12\,820.$$

Ieškomas skaičius 512 820.

A n t r a s b ū d a s. Sprendžiama dalybos veiksmu:

```
  12820
 _5abcde | 4
   4     |------
  _11      12820
    8      abcde5
   _32
    32
     _8
      8
     _20
      20
       0
```

A t s a k y m a s: 512 820.

74.1. Aišku, kad mažesnis už 1000 skaičius turi ne daugiau kaip 4 skirtingus pirminius dauginamuosius, nes jau $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11>$ >1000. Norint gauti kuo daugiau daliklių, reikia kaip galima didesniu laipsniu pakelti kuo mažesnį pirminį dauginamąjį. Taigi išnagrinėkime tokius skaičius:

kai yra 1 pirminis dauginamasis:

2^9 (10) (skliausteliuose nurodytas daliklių skaičius);

kai yra 2 skirtingi pirminiai dauginamieji:

$2^8\cdot3$ (18), $2^6\cdot3^2$ (21), $2^5\cdot3^3$ (24);

kai yra 3 skirtingi pirminiai dauginamieji:

$2^6\cdot3\cdot5$ (28), $2^4\cdot3^2\cdot5$ (30), $2^2\cdot3^2\cdot5^2$ (27);

kai yra 4 skirtingi pirminiai dauginamieji:

$2^3\cdot3\cdot5\cdot7$ (32).

Vadinasi, daugiausia daliklių (32) turi skaičius $2^3\cdot3\cdot5\cdot7=$ $=840$. Jo dalikliai šie: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 20, 21, 24, 28, 30, 35, 40, 42, 56, 60, 70, 84, 105, 120, 140, 168, 210, 280, 420, 840.

74.2. Sakykime, kad dviejų centų monetų yra x, tada penkių centų monetų $10-x$.

$$2x+5(10-x)=26,$$
$$x=8.$$

A t s a k y m a s: 8 monetos po du centus, 2 monetos po penkis centus.

75.1. $20-3=17$ (Lt) — studentų surinkti pinigai. Kadangi visi studentai davė po vienodą sveikąjį skaičių litų, tai jie galėjo duoti tik po vieną litą. Taigi iš viso buvo 17 studentų.

75.2. Kai $a=-10$, $x=-99$,
$2(a^2-x^2)=-19\,402$,
$3(a^2-x^2)=-29\,103$.

Dvigubas šių skaičių kvadratų skirtumas didesnis už tų pačių skaičių trigubą kvadratų skirtumą: $-19\,402-(-29\,103)=$ $=9701$.

76.1. Kas 24 h laikrodis rodys antrą valandą nakties. Vadinasi, po 75 h laikrodis rodys tiek valandų, kiek gausime prie 2 pridėję 75 dalybos iš 24 liekaną.

Po 75 h laikrodis rodys 5 valandą nakties.

76.2. Kai $a=-18$, $x=-11$, tai $\left(\frac{a+x}{2}\right)^3-\frac{a^3+x^3}{2}=532{,}875$.

77.1. Sakykime, kad po x metų sūnaus ir dukros amžiaus suma bus lygi motinos amžiui:

$$34+x=12+x+10+x,$$
$$x=12.$$

A t s a k y m a s: po 12 metų.

77.2. Sakykime, kad dviejų iš eilės einančių nelyginių skaičių $2n+1$ ir $2n+3$ didžiausias bendrasis daliklis D. Jei abu skaičiai dalijasi iš kurio nors skaičiaus, tai ir jų skirtumas dalijasi iš to skaičiaus. Vadinasi, $(2n+3)-(2n+1)=2$ turi dalytis iš D. Tai galima tik tada, kai $D=1$, nes duotieji skaičiai nelyginiai.

78.1. Sakykime, kad laimėjimas lygus x Lt. Vyriausiam teko $0{,}3x+8$ Lt, viduriniajam — $0{,}4(x-0{,}3x-8)+16=0{,}28x+12{,}8$ (Lt). Jauniausias gavo $0{,}7(x-0{,}3x-8-0{,}28x-12{,}8)+24=0{,}294x+$ $+9{,}44$ (Lt).

$$0{,}3x+8+0{,}28x+12{,}8+0{,}294x+9{,}44=x;$$
$$x=240.$$

Atsakymas: 240 Lt; po 80 Lt.

78.2. 14^{23} baigiasi tuo pačiu skaitmeniu, kaip ir 4^{23}, o 23^{23} — tuo pačiu, kaip ir 3^{23}.

Keturių lyginis laipsnis yra skaičius, kurio paskutinis skaitmuo 6, o nelyginis laipsnis — skaičius, kurio paskutinis skaitmuo 4. Vadinasi, 14^{23} baigiasi keturiais.

Tris keldami laipsniu, gauname skaičius, kurių paskutiniai skaitmenys yra 3, 9, 7, 1. Tuomet laipsnių rodikliai gali būti išreikšti atitinkamai taip: $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$, $4k$; čia visur $k=0$, 1, 2, 3, ...

Kadangi rodiklį 23 padalijus iš keturių gaunama liekana 3, tai 23^{23} baigiasi septyniais. Savaime aišku, kad 70^{23} baigiasi 0. Kadangi $4+7+0=11$, tai $14^{23}+23^{23}+70^{23}$ reikšmė baigiasi vienetu.

Atsakymas: 1.

79.1. Sakykime, kad iš viso surinkta x grybų. Jauniausia mergaitė jų gavo $20+0{,}04(x-20)=19{,}2+0{,}04x$. Kai grybus pasiėmė jauniausia ir 21 grybą vyresnioji, liko $x-19{,}2-0{,}04x-21=$ $=0{,}96x-40{,}2$. Vyresnioji gavo $21+0{,}04(0{,}96x-40{,}2)=19{,}392+$ $+0{,}0384x$. Kadangi visos mergaitės gavo grybų po lygiai, tai:

$$19{,}2+0{,}04x=19{,}392+0{,}0384x,$$
$$x=120.$$

Kiekviena gavo po $19{,}2+0{,}04\cdot 120=24$ grybus; mergaičių buvo $120:24=5$.

79.2. $x<0$; $0<x<1$.

80.1. $x+(x+2)+(x+4)+(x+6)=420,$
$$x=102.$$

Atsakymas: 102; 104; 106; 108.

80.2. Nustatome, kad 3^{43} ir 7^{17} baigiasi septyniais. $3^{43}-7^{17}$ baigiasi 0 $(7-7=0)$. Vadinasi, $3^{43}-7^{17}$ dalijasi iš 10.

81.1. Sakykime, kad antroje lentynoje yra x knygų, tada pirmoje — $(x+30)$ knygų.

$$x+30+15=3(x-15).$$

Atsakymas: 75 knygos; 45 knygos.

81.2. Skaičiaus 10^n+2 skaitmenų suma lygi 3. Vadinasi, 10^n+2 dalijasi iš 3, o $\frac{10^n+2}{3}$ sveikasis skaičius.

82.1. Sakykime, kad brangesnių obuolių pirkta x kg, tada pigesnių — $\frac{120}{80}x=1{,}5x$ kg.

$$\frac{1{,}2x+0{,}8\cdot1{,}5x}{x+1{,}5x}=\frac{x(1{,}2+0{,}8\cdot1{,}5)}{x(1+1{,}5)}=0{,}96\ \text{Lt}=96\ \text{ct}.$$

Atsakymas: 96 ct.

82.2. Samprotaudami taip, kaip spręsdami V—VI klasės 78.2 uždavinį, nustatome, kad 7^{4k+1} baigiasi skaitmeniu 7. Kadangi 777 padalijus iš 4 gaunama liekana 1, tai $7^{777}+1$ paskutinis skaitmuo 8. Vadinasi, šis skaičius nedalus iš 5.

83.1. Sakykime, kad a, b ir c — triženklį skaičių sudarantys skaitmenys, be to, $a\neq0$, $c\neq0$. Tada $100a+10b+c-(100c+10b+a)=$ $=99a-99c=99(a-c)$. Vienas dauginamasis dalijasi iš 9 ir 11, vadinasi, sandauga dalijasi iš 9 ir iš 11.

83.2. $D(720,\ 96)=2^4\cdot3=48$,
$D(728,\ 280)=2^3\cdot7=56$,
$D(432,\ 1025)=1$.

84.1. Sakykime, kad a, b, c, d skaitmenys, be to, $a\neq0$ ir $d\neq0$. Tų skaičių skirtumas $1000a+100b+10c+d-(1000d+100c+10b+$ $+a)=999a+90b-90c-999d=999(a-d)+90(b-c)$. Ši suma bus didžiausia, kai $a-d$ ir $b-c$ įgis didžiausias reikšmes, t. y. kai $a=9$, $d=1$, $b=9$, $c=0$.

$$9901-1099=8802.$$

Atsakymas: 8802.

84.2. Išėmus iš pintinės 1 kiaušinį, joje likusių kiaušinių skaičius dalijasi iš 2, 3 ir 5. Vadinasi, dalijasi ir iš $2\cdot3\cdot5=30$. Iš skaičių, mažesnių už 40, tik 30 dalijasi iš 30. Taigi pintinėje yra 31 kiaušinis.

Atsakymas: 31 kiaušinis.

85.1. Tam pakanka rasti natūraliuosius lygties $7x+12y=100$ sprendinius. Kadangi suma ir vienas dėmuo $(12y)$ dalijasi iš 4, tai $7x$ dalus iš 4. Vadinasi, x turi būti natūralusis skaičius, dalus iš 4 ir mažesnis už 15, nes $7\cdot15>100$. Patikrinę x reikšmes 4, 8, 12, įsitikiname, kad y reikšmė yra natūralusis skaičius 6 tik tada,

kai $x=4$. Taigi iš nurodytų atkarpų vieninteliu būdu galima sudėti 1 m ilgio atkarpą; reikia imti keturias 7 cm ir šešias 12 cm ilgio atkarpas.

85.2. Jei 7 pieštukai brangesni už 8 sąsiuvinius, tai 1 pieštukas brangesnis už 1 sąsiuvinį, todėl $7+1=8$ pieštukai brangesni už $8+1=9$ sąsiuvinius.

A t s a k y m a s: 8 pieštukai.

86.1. Šių stačiakampių kraštinių ilgius pažymime raidėmis a ir b $(a \leqslant b)$.

Kai $a=1$, tai $b=1, 2, 3, 4, \ldots, 9$;
kai $a=2$, tai $b=2, 3, 4$;
kai $a=3$, tai $b=3$.

Ieškoma suma lygi $1\cdot(1+2+3+\ldots+9)+2\cdot(2+3+4)+3\cdot 3=$ $=72$.

86.2. Iš nurodytų skaitmenų galima sudaryti 24 keturženklius skaičius, kurių skaitmenys skirtingi. Iš jų bus 12 skaičių ($\overline{24xy}$, $\overline{42xy}$, $\overline{x24y}$, $\overline{x42y}$, $\overline{xy24}$, $\overline{xy42}$, $\overline{24yx}$, ...), kurie prieštarauja sąlygai. Vadinasi, sąlygą atitinka 12 skaičių.

87.1. Kiekvienas šachmatininkas žaidžia su visais turnyro dalyviais, išskyrus save, todėl būtų $6\cdot 5$ partijų. Taip skaičiuodami kiekvieną partiją įskaitome 2 kartus. Taigi iš viso buvo sužaista $\frac{6\cdot 5}{2}=15$ partijų.

87.2. Jei iš 458 atimtume 3, o iš 259 atimtume 4, tai gautume skaičius 455 ir 255, kurie dalijasi iš ieškomo skaičiaus. Išskaidome šiuos skaičius pirminiais dauginamaisiais: $455=5\cdot 7\cdot 13$, $255=3\cdot 5\cdot 17$. Matome, kad jie turi tik vieną bendrą daliklį 5. Jis atitinka uždavinio sąlygą.

A t s a k y m a s: 5.

88.1. Jei komandose būtų tik po vieną šachmatininką, tai iš viso būtų sužaista $\frac{15\cdot 14}{2}=105$ partijos. Kadangi komandoje 4 šachmatininkai, tai iš viso olimpiadoje sužaista $105\cdot 4=420$ partijų.

88.2. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{98\cdot 99}+\frac{1}{99\cdot 100}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+$
$+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{98}-\frac{1}{99}+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$.

89.1. Iš vieno taško, jungiant jį su kiekvienu kitu tašku, galima nutiesti $(n-1)$ tiesę. Taip galima daryti su kiekvienu duotu tašku. Iš viso gausime $n(n-1)$ tiesę. Tačiau skirtingų tiesių bus du

kartus mažiau, nes, pavyzdžiui, tiesė AB ir tiesė BA laikoma ta pačia tiese.

Atsakymas: $\frac{n(n-1)}{2}$ tiesių.

89.2. $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\ldots+\frac{1}{342}+\frac{1}{380}=\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+$ $+\frac{1}{6\cdot7}+\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{8\cdot9}+\frac{1}{9\cdot10}+\ldots+\frac{1}{18\cdot19}+\frac{1}{19\cdot20}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-$ $-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{18}-\frac{1}{19}+\frac{1}{19}-\frac{1}{20}=\frac{1}{4}-$ $-\frac{1}{20}=\frac{1}{5}$.

90.1. Sakykime, kad iš pradžių antrame bake buvo x litrų benzino. Tada pirmame $x+10$, o trečiame $50-x-(x+10)$ litrų benzino. Po perpylimo pirmame bake buvo $x+10-26$, antrame x, trečiame $50-x-(x+10)+26$ litrai benzino.

Remdamiesi sąlyga sudarome lygtį:

$$x=50-x-(x+10)+26,$$
$$x=22,$$
$$x+10=22+10=32.$$

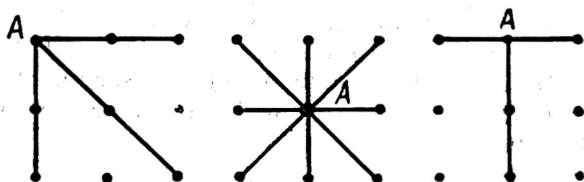
Patikrinimas

Iš pradžių pirmame bake buvo 32 l benzino, antrame — 22 l, o trečiame $50-22-32=-4$ (l). Toliau tikrinti nėra prasmės. Sprendinys neatitinka uždavinio sąlygos.

Atsakymas: uždavinys neturi sprendinio.

90.2. $\frac{4}{5\cdot7}+\frac{4}{7\cdot9}+\frac{4}{9\cdot11}+\frac{4}{11\cdot13}+\ldots+\frac{4}{59\cdot61}=\frac{2}{5}-\frac{2}{7}+\frac{2}{7}-\frac{2}{9}+\frac{2}{9}-$ $-\frac{2}{11}+\frac{2}{11}-\frac{2}{13}+\ldots+\frac{2}{59}-\frac{2}{61}=\frac{2}{5}-\frac{2}{61}=\frac{112}{305}$.

91.1. Jei taškas A pasirinktas, tai kitas dvi trikampio viršūnes (B ir C) galima pasirinkti $\frac{8\cdot7}{2}=28$ būdais. Jie apima ir tuos atvejus, kai visi trys taškai A, B, C yra vienoje tiesėje. Jei taškas A — kvadrato viršūnė, reikia atmesti 3 poras taškų B ir C; jeigu taškas A — kvadrato centras, tai atmetamos 4 poros taškų B ir C, o kai taško A visos kitos padėtys — 2 poros taškų B ir C (22 pav.). Taigi trikampių skaičius priklauso nuo taško A padėties ir lygus 24, 25 arba 26.



22 pav.

91.2. $\frac{7}{2\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\frac{7}{16\cdot 23}+\frac{7}{23\cdot 30}+\frac{7}{30\cdot 37}+\frac{7}{37\cdot 44}+\frac{7}{44\cdot 51}+\frac{7}{51\cdot 58}=\frac{1}{2}-$
$-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}-\frac{1}{23}+\frac{1}{23}-\frac{1}{30}+\frac{1}{30}-\frac{1}{37}+\frac{1}{37}-\frac{1}{44}+\frac{1}{44}-\frac{1}{51}+\frac{1}{51}-\frac{1}{58}=$
$=\frac{1}{2}-\frac{1}{58}=\frac{14}{29};$

$$\frac{14}{29}x=14,$$
$$x=29.$$

Atsakymas: 29.

92.1. Dvi gretimas stačiakampio kraštines sudarome iš $22:2=11$ degtukų: 1 ir 10, 2 ir 9, 3 ir 8, 4 ir 7, 5 ir 6. Tokių stačiakampių plotai atitinkamai lygūs 10, 18, 24, 28, 30 (sutartinių plotų vienetų). Didžiausio ploto stačiakampį gausime sudarydami gretimas kraštines iš 5 ir 6 degtukų.

92.2. $333\cdot\left(\frac{7}{111\,111}+\frac{573}{222\,222}-\frac{2}{3\cdot 7\cdot 37}\right)=3\cdot\left(\frac{71\cdot 111}{111\,111}+\frac{573\cdot 111}{222\,222}-\frac{2\cdot 111}{3\cdot 7\cdot 37}\right)=$
$=3\cdot\left(\frac{71}{1001}+\frac{573}{2002}-\frac{2}{7}\right)=\frac{3\cdot 143}{2002}=\frac{3}{14}.$

93.1. Jei a ir b — stačiakampio kraštinių ilgiai, tai jo perimetras lygus $2(a+b)$. Uždavinyje a ir b — sveikieji skaičiai, todėl stačiakampio perimetras turi būti lyginis skaičius. Bet pagaliukų ilgių suma $4\cdot 1+4\cdot 2+7\cdot 3+5\cdot 4=53$ (cm) yra nelyginis skaičius. Todėl iš visų turimų pagaliukų negalima sudaryti stačiakampio.

93.2. $\frac{5\cdot 3\cdot 7\cdot 13\cdot 37}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37}-\frac{4\cdot 3\cdot 7\cdot 13\cdot 37}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37}+\frac{5\cdot 3\cdot 7\cdot 13\cdot 37}{2\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot x}=\frac{7}{22},$

$$\frac{5}{11}-\frac{4}{11}+\frac{3\cdot 5\cdot 37}{2\cdot 11\cdot x}=\frac{7}{22}.$$
$$\frac{3\cdot 5\cdot 37}{2\cdot 11\cdot x}=\frac{5}{22},$$
$$x=111.$$

Atsakymas: 111.

94.1. Kadangi abi komandos turėjo po lygiai žmonių, tai varžybose iš viso dalyvavo lyginis gimnastų skaičius. Didžiausia balų suma, kurią gali surinkti 16 dalyvių, lygi $16\cdot 9=144$. Tai mažiau už 156. Mažiausia balų suma, kurią gali surinkti 20 dalyvių, yra $20\cdot 8=160$. Tai daugiau už 156. Iš čia aišku, kad varžybose dalyvavo 18 gimnastų.

94.2. Atsakymas: 0.

95.1. Visų skaičių nuo 1 iki 9 suma lygi 45, todėl kiekvienos eilutės skaičių suma 15. Skaičių 1 galima padidinti iki 15 tik dviem būdais:

$$1+9+5=15,$$
$$1+8+6=15.$$

Todėl 1 negali būti nei kampiniame langelyje, nei lentelės centre. Reikia įsitikinti, kad jis gali būti bet kuriame kitame langelyje. Tai patvirtina pateikti pavyzdžiai:

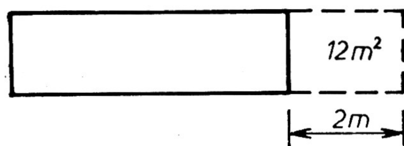
8	1	6
3	5	7
4	9	2

2	7	6
9	5	1
4	3	8

8	3	4
1	5	9
6	7	2

2	9	4
7	5	3
6	1	8

95.2. Ilgį padidinus 2 m, pradinis stačiakampis papildomas stačiakampiu, kurio ilgis 2 m, o plotis toks pat, kaip ir pradinio stačiakampio (23 pav.). Antrojo stačiakampio (o tuo pačiu ir pradinio) plotis 12 : 2=6 (m). Pirmojo stačiakampio ilgis gali būti lygus bet kuriam skaičiui.



23 pav.

Atsakymas: ilgio apskaičiuoti negalima; plotis 6 m.

96.1. $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=4n+6=2(2n+3)$. $2(2n+3)$ dalijasi iš 2, taigi $2(2n+3)$ nėra pirminis skaičius. Dar paprasčiau remtis teiginiu: dviejų lyginių ir dviejų nelyginių natūraliųjų skaičių suma yra lyginis skaičius, didesnis už 2.

96.2. Pažymėję garlaivio greitį stovinčiame vandenyje x km/h, sudarome lygtį:

$$6(x+5)=10(x-5),$$
$$x=20 \text{ km/h}.$$

Garlaivis viena kryptimi nuplaukė $6 \cdot 25=150$ (km). Vidutinis garlaivio viso kelio greitis lygus $300:16=18{,}75$ (km/h).

Atsakymas: 18,75 km/h.

97.1. Sakykime, kad visą kelią automobilis nuvažiavo per $4x$ h, tuomet visas kelias lygus $75 \cdot 3x+45x=270x$ (km). Vidutinis greitis lygus $\frac{270x}{4x}=\frac{270}{4}=67{,}5$ (km/h).

97.2. $\frac{52\,367-x}{47\,633+x}=\frac{17}{83}$.

$x=35\,367.$

98.1. Sakykime, atstumas nuo Vilniaus iki Kauno lygus x km. Tada vidutinis greitis toks:

$$2x:\left(\frac{x}{50}+\frac{x}{60}\right), \text{ arba } 2:\left(\frac{1}{50}+\frac{1}{60}\right)\approx 54{,}5 \text{ (km/h)}.$$

98.2. P i r m a s b ū d a s. Sakykime, kad nesuprastintos trupmenos skaitiklis $7x$, tuomet vardiklis $13x$. Sudarome lygtį:

$$7x+13x=4140,\ x=207.$$

Nesuprastinta trupmena $\frac{1449}{2691}$.

A n t r a s b ū d a s. Sakykime, kad nesuprastintos trupmenos skaitiklis x, tuomet vardiklis $4140-x$. Sudarome lygtį: $\frac{x}{4140-x}=$ $=\frac{7}{13}$, $x=1449$.

A t s a k y m a s: $\frac{1449}{2691}$.

99.1. Sakykime, kad viso kelio ilgis $3a$ km. Pirmąjį kelio trečdalį automobilis nuvažiavo per $\frac{a}{54}$ h, antrąjį — per $\frac{a}{45}$ h, trečiąjį — per $\frac{a}{60}$ h. Visa kelionė užtruko $\left(\frac{a}{54}+\frac{a}{45}+\frac{a}{60}\right)$ h. Vidutinis automobilio greitis $\frac{3a}{\frac{a}{54}+\frac{a}{45}+\frac{a}{60}}=\frac{3a}{a\left(\frac{1}{54}+\frac{1}{45}+\frac{1}{60}\right)}=\frac{3}{\frac{1}{54}+\frac{1}{45}+\frac{1}{60}}\approx$ $\approx 52{,}3$ (km/h).

99.2. 1) $\frac{8}{225}\cdot 900=32$; 2) $\frac{8}{225}\cdot 15=\frac{8}{15}$.

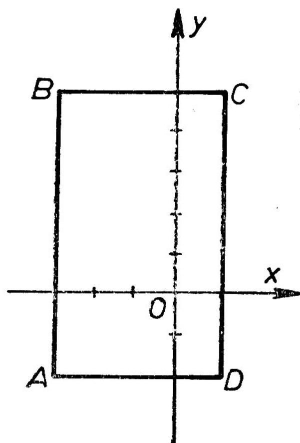
A t s a k y m a s: $32\frac{8}{15}$.

100.1. Sakykime, kad „Moskvičiaus" greitis x km/h, tada „Žigulių" greitis $2\frac{16}{17}x$ km/h. Iš pradžių „Žiguliai" buvo už $2\frac{16}{17}x\times$ $\times 2\frac{1}{5}=\frac{110}{17}x$ km nuo „Moskvičiaus". Automobilių greičių skirtumas $2\frac{16}{17}x-x=1\frac{16}{17}x$ (km/h). „Žiguliai" pasivys „Moskvičių" po $\frac{110}{17}x:1\frac{16}{17}x=3\frac{1}{3}$ (h). Vadinasi, tai atsitiks 8 h 30 min $+$ $+3$ h 20 min $=11$ h 50 min.

A t s a k y m a s: 11 valandą 50 minučių.

100.2. $AB=5-(-2)=5+2=7$ (vien.), $BC=1-(-3)=1+3=4$ (vien.).

Stačiakampio $ABCD$ perimetras lygus $(7+4)\cdot 2=22$ (vien.), jo plotas lygus $7\cdot 4=28$ (kv. vien.) (24 pav.).



24 pav.

101.1. $560:4=140$ (km/h) — automobilių greičių suma. Pagal sąlygą: 0,85 pirmo automobilio greičio ir 1,2 antro automobilio greičio suma lygi 140 km/h.

x km/h — pirmojo automobilio greitis,

$(140-x)$ km/h — antrojo automobilio greitis. Tada

$0{,}85x+1{,}2(140-x)=140,$

$x=80.$

Atsakymas: 80 km/h, 60 km/h.

101.2. Atsakymas: $1\frac{19}{24}$.

102.1. Sakykime, kad kiekvienas uždavinio skaitinis dydis (kelias, greitis, laikas) yra atitinkamai lygus sutartiniam vienetui. Tada padidintas greitis bus $1+1\cdot 0{,}25=1{,}25$ vieneto, o atitinkamas laikas $1:1{,}25=0{,}8$ vieneto. Taigi laikas sumažėjo $1-0{,}8=$ $=0{,}2$ vieneto. Apskaičiavę gauname, kad 0,2 sudaro 20% skaičiaus 1.

Atsakymas: 20%.

102.2. Atsakymas: 15,95.

103.1. Sakykime, kad tas skaičius yra a. Jo 25% lygu $0{,}25a$. Padidintas skaičius $a+0{,}25a=1{,}25a$. Reikia apskaičiuoti, kiek procentų skaičiaus $1{,}25a$ sudaro skaičius $0{,}25a$.

$$\frac{0{,}25a}{1{,}25a}\cdot 100=20\ (\%).$$

Atsakymas: 20%.

103.2. a) Kai $x=-10$, reiškinio reikšmė lygi -18;
b) kai $x=0{,}5$, reiškinys neturi prasmės.

104.1. $2\cdot 1{,}7-20x=-0{,}85x+3{,}4;$
$-20x+0{,}85x=3{,}4-3{,}4;$
$-19{,}15x=0;$
$x=0.$

Atsakymas: 0.

104.2. Sakykime, kad vienas dėmuo lygus $5x$, tuomet kitas — $12x$. Jų suma lygi $17x$. Mažesnysis dėmuo sudaro $\frac{5x}{17x}\cdot 100=\frac{500}{17}\approx 29{,}4$ (%) sumos.

105.1. 1) 16% skaičiaus 200 yra 32. Vadinasi, vandens buvo 32 kg;
2) $32-20=12$ (kg) — vandens masė džiovintuose grūduose.
3) $200-20=180$ (kg) — džiovintų grūdų masė.
4) 12 kg sudaro $\approx 6{,}7$% 180 kg.
Atsakymas: $\approx 6{,}7$%.

105.2. Nustatome, kurie pirminiai dauginamieji yra ieškomos trupmenos skaitiklyje ir vardiklyje:

$$550=2\cdot 5\cdot 5\cdot 11.$$

Kadangi trupmena išreiškiama baigtine dešimtaine, tai skaičiaus 11 negali būti vardiklio skaidinyje. Atsižvelgiant į tai, kad ieškomoji trupmena turi būti nesuprastinama, abu penketai yra arba skaitiklyje, arba vardiklyje. Galimos šios trupmenos:

$$\frac{11}{5\cdot 5\cdot 2}=\frac{11}{50}=0{,}22;\quad \frac{11\cdot 2}{5\cdot 5}=\frac{22}{25}=0{,}88;\quad \frac{11\cdot 5\cdot 5}{2}=\frac{275}{2}=137{,}5.$$

Atsakymas: $\frac{11}{50}$; $\frac{22}{25}$; $\frac{275}{2}$.

106.1. Jei prie ieškomo skaičiaus pridedame vienetą, tai gauname skaičių, kuris dalijasi iš 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Toks mažiausias skaičius yra $K(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)=2520$, o ieškomas skaičius vienetu mažesnis: 2519.

106.2. 1) $200:100\cdot 62=124$ (g) — grynos sieros rūgšties kiekis, esantis 200 g 62% sieros rūgšties.
2) $124:8\cdot 100=1550$ (g) — 8% sieros rūgšties kiekis, gaunamas iš 200 g 62% sieros rūgšties.
Atsakymas: 1550 g.

107.1. Apskaičiuojame skaičių 453 ir 755 mažiausią bendrąjį kartotinį: $K(453, 755)=2265$.
Kadangi $15\,000=2265\cdot 6+1410$, tai didžiausias ieškomas skaičius $2265\cdot 6+175=13\,765$. Kitas sąlygą atitinkantis skaičius yra $13\,765-2265=11\,500$.
Atsakymas: 11 500; 13 765.

107.2. Rašydami dviejų skaičių mažiausią bendrąjį kartotinį, pasirenkame vieno jų skaidinį ir prie jo prijungiame kito skaičiaus tuos pirminius daugiklius, kurių nėra pirmame skaidinyje. Vadinasi, lieka jų didžiausias bendrasis daliklis. Todėl didžiausio bendrojo daliklio ir mažiausio bendrojo kartotinio sandauga lygi tų skaičių sandaugai.

108.1. Pažymėkime ieškomą skaičių $\frac{m}{n}$ ($m \in N$, $n \in N$). Padaliję $\frac{m}{n}$ iš sąlygoje pateiktų trupmenų, gautume reiškinius $\frac{m \cdot 396}{n \cdot 35}$ ir $\frac{m \cdot 297}{n \cdot 28}$.

Skaičius $\frac{m}{n}$ bus mažiausias, o tų reiškinių reikšmės — sveikieji skaičiai, jei $m = K(35, 28) = 140$ ir $n = D(396, 297) = 99$.

Vadinasi, $\frac{140}{99}$ — mažiausias teigiamas racionalusis skaičius, kurį padalijus iš duotųjų trupmenų gaunami sveikieji skaičiai (16 ir 15).

A t s a k y m a s: $\frac{140}{99}$.

108.2. $420 : 20 = 21 = 3 \cdot 7$ — duotų skaičių skirtingų dauginamųjų sandauga. Kadangi vienas skaičius nesidalija iš kito, ieškomi skaičiai gali būti tik $20 \cdot 3 = 60$ ir $20 \cdot 7 = 140$.

A t s a k y m a s: 60, 140.

109.1. Sprendžiame panašiai kaip V—VI klasės **108.1 uždavinį**. $D(385, 231) = 77$; $K(156, 130) = 780$.

Vadinasi, $\frac{77}{780}$ — didžiausias skaičius, iš kurio padalijus duotąsias trupmenas gaunami sveikieji skaičiai (25 ir 18).

A t s a k y m a s: $\frac{77}{780}$.

109.2. 1) Sakykime, kad pradinė prekių kaina yra 100%.

Sumažinus kainas 20%, prekių kaina sudarė 80% pradinės kainos.

2) $80 : 100 \cdot 15 = 12$ (%) — tiek procentų pradinės kainos atpigo prekės antrą kartą.

3) $20 + 12 = 32$ (%) — tiek procentų atpigo prekės, palyginti su pradine kaina.

110.1. Sakykime, kad šachmatininkas A žaidžia baltosiomis figūromis, o šachmatininkas B — juodosiomis. Berniukas laukia A šachmatininko ėjimo ir pakartoja tą patį ėjimą žaisdamas su B. Po to jis laukia, kaip į paskutinį jo ėjimą atsakys B, ir pakartoja šį ėjimą žaisdamas su A, ir t. t. Faktiškai žaidžia A su B. Jeigu A laimės, tai ir berniukas laimės prieš B, ir atvirkščiai. Arba abi partijos baigsis lygiomis.

110.2. Ieškomo skaičiaus vienas skaitmuo yra nulis. Šimtų skaitmuo ne nulis (kitaip tas skaičius nebūtų triženklis). Dešimčių

skaitmuo taip pat negali būti nulis, nes jis didesnis už vienetų skaitmenį. Vadinasi, vienetų skaitmuo nulis, tuomet dešimčių — 4, o šimtų — gali būti 2, 4, 6 arba 8.

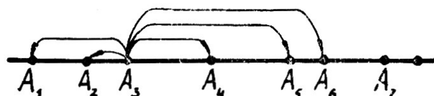
A t s a k y m a s: 240; 440; 640; 840.

VII—VIII KLASĖ

1.1. Septintokai sudaro $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}=\frac{5}{14}$ salėje esančių mokinių skaičiaus. Visų salėje esančių mokinių skaičius turi dalytis iš 6 ir 7, t. y. iš 42, ir būti artimas skaičiui 80. Toks skaičius yra 84. Todėl salėje yra $84\cdot\frac{5}{14}=30$ septintokų.

1.2. Atkarpą nustato du taškai. Pasirinkę vieną tašką atkarpų pradžia, o kitus — atkarpų galais, gausime $(n-1)$ atkarpą (25 pav.). Kadangi kiekvienas taškas gali būti atkarpos pradžios taškas, tai gauname n kartų po $n-1$ atkarpą, t. y. $n(n-1)$. Tačiau skirtingų atkarpų bus $\frac{n(n-1)}{2}$, nes, pavyzdžiui, A_1A_2 ir A_2A_1 — ta pati atkarpa.

A t s a k y m a s: $\frac{n(n-1)}{2}$.

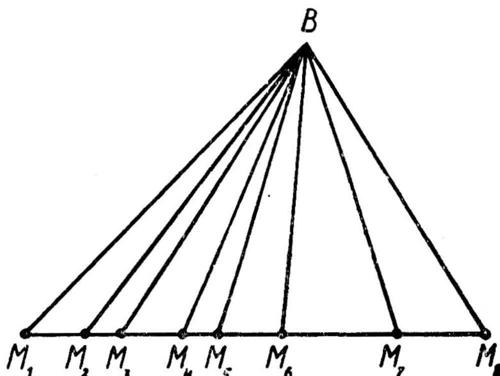


25 pav.

2.1. Kadangi kiekvieną dieną pagaminamas detalių sveikasis skaičius, tai detalių, kurias turėjo pagaminti Antanas, skaičius dalijasi iš 7, iš 6 ir iš 20, taigi ir iš 420. Petro tokių detalių skaičius dalijasi iš 308. Iš viso detalių mažiau negu 1000, todėl Antanas turėjo pagaminti 420 (o ne 840), Petras — 308 (o ne 616 arba 924) detales.

A t s a k y m a s: Antanas pagamino 147 detales, Petras — 88 detales.

2.2. Taškas B — bendra visų trikampių viršūnė (26 pav.). Kitas dvi trikampio viršūnes galima pasirinkti $\frac{8\cdot 7}{2}=28$ būdais. Vadinasi, gauname 28 trikampius.



26 pav.

3.1. Sakykime, kad berniukas liovėsi žiūrėjęs pro langą, kai liko važiuoti dar a km. Taigi, žiūrėdamas pro langą, jis nuvažiavo $2a$ km. Pusę kelio sudaro $3a$ km, o visas kelias — $6a$ km. Vadinasi, žiūrėdamas pro langą, berniukas nuvažiavo $2a:6a=\frac{1}{3}$ viso kelio.

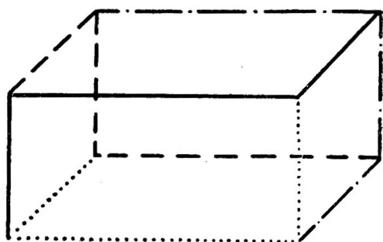
3.2. Iš taško A į tašką B galima patekti 6 keliais: *12349*; *12549*; *12589*; *16789*; *16549*; *16589*.

4.1. Sakykime, kad meškeriotojas sugavo x karšių, tada pūgžlių buvo $24-x$. Pagal jį, karšiai sudaro $3x$ žuvų, o pūgžliai — $\frac{24-x}{3}$ žuvų. Vadinasi,

$$3x+\frac{24-x}{3}=24, \text{ iš čia } x=6.$$

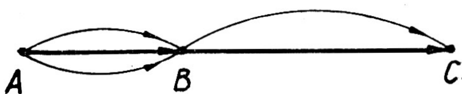
Atsakymas: 6 karšius.

4.2. 27 paveiksle pavaizduotas stačiakampis gretasienis, kurio matmenys yra 4 cm, 3 cm ir 2 cm. Visus vielos gabalus reikia išlankstyti taip, kaip parodyta paveiksle.



27 pav.

5.1. Iš miesto A į miestą B galima vykti trimis keliais, o toliau — į miestą C — veda dar du keliai (28 pav.). Vadinasi, iš viso iš miesto A į C per miestą B yra $3\cdot2=6$ skirtingi keliai. Vadinasi, 8 žmonės negalės iš A į C atvykti skirtingais keliais.

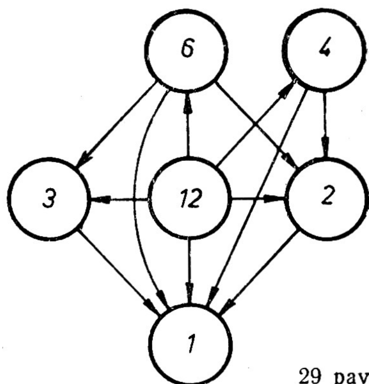


28 pav.

5.2. Žiūrėdami į paveikslą, galime padaryti išvadą, kad skaičius d dalijasi iš b, c, e, f, taigi skaičius d turi ne mažiau kaip 4 skirtingus daliklius, kurie skiriasi nuo jo paties. Iš pateiktų skaičių toks gali būti tik 12. Vadinasi, $d=12$.

Skaičius b turi ne mažiau kaip tris skirtingus daliklius, kurie skiriasi nuo jo paties. Vadinasi, $b=6$.

Skaičius $e=2$ arba 3, o $f=1$. Tačiau $e\neq2$, nes priešingu atveju dar privalėtume įrašyti skaičius 3 ir 4, kurių nė vienas nėra kito daliklis. Todėl $e=3$, $c=2$, $a=4$. Dar reikia nubrėžti rodykles (29 pav.).



29 pav.

6.1. 1) $32-32\cdot 0{,}2=25{,}6$ (%) — tiek procentų visų staklių sudaro šlifavimo staklės.

2) $100-(32+25{,}6)=42{,}4$ (%) — tiek procentų visų staklių sudaro tekinimo staklės.

3) šlifavimo staklių skaičių laikydami 100%, sužinome, kad $42{,}4:0{,}256-100=65{,}625$ (%) — tekinimo staklių yra daugiau negu šlifavimo.

6.2. Nesunku pamatyti, kad $b\leqslant 100$, $c\leqslant 50$, $d\leqslant 25$, $a\leqslant 12$, nes, einant nuo b prie a, per c ir d, kiekviename žingsnyje prarandamas daliklis, nelygus 1. Skaičiai $a=12$, $d=24$, $c=48$, $b=96$ atitinka uždavinio sąlygą. Taigi didžiausias skaičius, kuris gali būti vietoj a, lygus 12.

7.1. Pirmas būdas. Dėžes vadinkime didžiosiomis, vidutinėmis, mažosiomis. Sakykime, kad x didžiųjų ir y vidutinių dėžių yra netuščios. Pagal sąlygą: $x+y=54$. Bet vidutinių dėžių skaičius 10 kartų didesnis negu x, o mažųjų dėžių 10 kartų daugiau negu y. Vadinasi, iš viso dėžių yra $10+10x+10y=10\cdot(1+x+y)=$ $=10\cdot(1+54)=550$.

Antras būdas: Uždavinį galime išspręsti ir su vienu kintamuoju. Sakykime, kad didžiųjų netuščių dėžių yra x, tada vidutinių iš viso yra $10x$, o mažųjų — $(54-x)\cdot 10$ dėžių.

Trečias būdas. Lengviausiai spręstume samprotaudami taip. Jei būtų 1 netuščia dėžė, turėtume iš viso 20 dėžių. Jei būtų 2 netuščios dėžės — 30 dėžių. Jei būtų 3 netuščios dėžės — 40 dėžių. Ir t. t. Esant 54 netuščioms dėžėms — 550 dėžių.

Atsakymas: 550 dėžių.

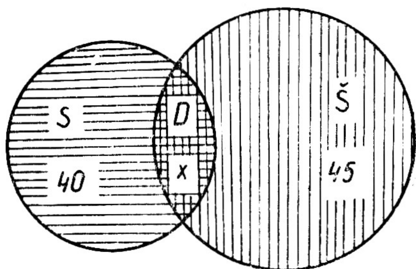
7.2. Jei prie sugalvoto skaičiaus pridėtume 12, po to iš jo atimtume 5, tai gautas skaičius būtų 7 vienetais didesnis už sugalvotą. Kadangi gautas skaičius dalijasi iš 7, tai ir sugalvotas skaičius dalijasi iš 7.

Jei prie sugalvoto skaičiaus pridėtume 14 ir iš jo atimtume 5, tai gautas skaičius būtų 9 vienetais didesnis už ieškomą. Iš sąlygos žinome, kad jis dalijasi iš 9, vadinasi, ir ieškomas skaičius dalijasi iš 9.

Analogiškai įrodoma, kad ieškomas skaičius dalijasi ir iš 13. Vadinasi, mažiausias skaičius, atitinkantis uždavinio sąlygą, yra $7\cdot 9\cdot 13=819$. Šis skaičius ir yra ieškomasis, nes kiti skaičiaus 819 kartotiniai nėra triženkliai.

Atsakymas: 819.

8.1. Sakykime, kad varžybose dalyvavo x dvikovininkų (30 pav.). Jei prie 40 slidininkų prijungsime 45 šuolininkus, tai gausime 85 dalyvius, ir dvikovininkai bus įskaityti du kartus. Vadinasi, dalyvių skaičius lygus $85-x$. Pagal sąlygą: $85-x>60$. Ši nelygybė teisinga tik tada, kai $x<25$. Tai ir reikėjo įrodyti.



30 pav.

8.2. Sakykime, kad $\overline{abcd}$ — keturženklis skaičius, o jo ir skaičiaus $\overline{dcba}$ skirtumas lygus 1008. Skirtumas yra teigiamas, todėl $a>d$. Kadangi skirtumo vienetų skaitmuo 8, tai $a=a+2$. Kadangi skirtumo dešimčių skaitmuo 0, tai $c=b+1$ (arba $b=9$, $c=0$). Bet tada abiem atvejais skirtumo šimtų skaitmuo turėtų būti 9, o ne 0, nes jį gauname, iš b atėmę c. Vadinasi, tokių skaičių skirtumas negali būti 1008.

9.1. $x+10x+1000x=254{,}772$; čia x — mažiausias skaičius.
A t s a k y m a s: 0,252; 2,52; 252.

9.2. $a+b+c+d$ gali būti tik 6, 7, 8 arba 9, nes tik šių skaičių ketvirtasis laipsnis yra keturženkliai skaičiai: 1296, 2401, 4096, 6561. Tinka tik skaičius 2401 (jo skaitmenų suma lygi 7).
A t s a k y m a s: 2401.

10.1. Sakykime, vienas skaičius $x+16$, kitas x.

$$\frac{5}{32}(x+16)=\frac{3}{16}x,$$

$x=80$;
$x+16=96$.
A t s a k y m a s: 96; 80.

10.2. Kadangi kiekvieno skaičiaus skaitmenų suma neneigiama, tai ieškomas skaičius turi būti mažesnis už 328. Jis negali būti vienaženklis arba dviženklis, nes tada, pagal sąlygą, skaičiaus, mažesnio už 328, skaitmenų suma būtų lygi triženkliam skaičiui. Vadinasi, jis triženklis, todėl pažymėkime $\overline{abc}$; be to, $a\leqslant 3$. Gauname: $a+b+c=328-(100a+10b+c)$, arba $101a+11b+2c=$ $=328$. $a\neq 1$; $a\neq 2$, nes tada $11b+2c$ turėtų būti lygus $328-$ $-101a\geqslant 126$. Tačiau didžiausia reikšmė, kurią gali įgyti šis reiškinys, yra tik $11\cdot 9+2\cdot 9=117$.

Vadinasi, $a=3$, tada $11b+2c=25$. Šią lygybę tenkina tik $b=1$, $c=7$.
A t s a k y m a s: 317.

11.1. Pirma mašininkė per minutę perrašo $\frac{1}{320}$ rankraščio dalį, o antra — $\frac{1}{280}$ rankraščio dalį.

Pirmos ir antros mašininkės perrašytų puslapių santykis lygus $\frac{1}{320}:\frac{1}{280}=7:8$.

Sudarome lygtį $7x+8x=90$, $x=6$.

Pirma mašininkė perrašė $7\cdot6=42$ puslapius, o antra — $8\cdot6=$ $=48$ puslapius.

11.2. $100^{20}=(100^2)^{10}=10\,000^{10}$.

Kadangi $10\,000>9000$, tai ir $10\,000^{10}>9000^{10}$.

Atsakymas: $100^{20}>9000^{10}$.

12.1. Kadangi $a:b=8:12$, o $b:c=12:15$, tai trikampio kraštinių ilgiai proporcingi skaičiams 8; 12; 15.

Sakykime, kad $k>0$ — proporcingumo koeficientas. Vadinasi, trikampio kraštinių ilgiai lygūs $8k$, $12k$, $15k$. Kadangi kiekvienos trikampio kraštinės ilgis yra mažesnis už kitų dviejų jo kraštinių ilgių sumą, tai toks trikampis galimas.

12.2. Ne. Kai $n=4$, gauname:
$2^9-1=511=7\cdot73$.

13.1. II : III : IV $=6{,}5:7{,}8:9{,}1=5:6:7$.

1) $26\%\cdot1\frac{1}{4}=32{,}5\%$ metinės užduoties įvykdė įmonė per antrąjį ketvirtį.

2) $32{,}5:5=6{,}5\%$ tenka vienai daliai.

3) $6{,}5\cdot6=39\%$ metinės užduoties įvykdė įmonė per trečiąjį ketvirtį.

4) $6{,}5\cdot7=45{,}5\%$ metinės užduoties įvykdė įmonė per ketvirtąjį ketvirtį.

5) $26\%+32{,}5\%+39\%+45{,}5\%=143\%$ metinės užduoties įvykdė įmonė.

6) $143\%-100\%=43\%$ įmonė viršijo užduotį.

Atsakymas: 43%.

13.2. Pažymėkime ieškomąjį skaičių $\overline{abc}$, o dviženklius skaičius — $\overline{ab}$, $\overline{ba}$, $\overline{ac}$, $\overline{ca}$, $\overline{bc}$, $\overline{cb}$. Pagal sąlygą: $100a+10b+c=22a+22b+22c$, arba $26a=4b+7c$.

Kadangi $4b+7c$ ne triženklis skaičius, tai a gali įgyti reikšmes, lygias tik 1, 2 ir 3.

Kai $a=1$, lygybė teisinga su $b=3$ ir $c=2$; ieškomas skaičius 132.

Kai $a=2$, lygybė teisinga su $b=6$ ir $c=4$; ieškomas skaičius 264.

Kai $a=3$, lygybė teisinga su $b=9$ ir $c=6$; ieškomas skaičius 396.

A t s a k y m a s: 132; 264; 396.

14.1. Sakykime, kad x — teisingų atsakymų skaičius.

$7x-(30-x)\cdot 12=77$,

$x=23$.

A t s a k y m a s: 23.

14.2. Pažymėkime ieškomą dviženklį skaičių $\overline{ab}$. Kadangi sandauga $\overline{ab}\cdot\overline{ba}$ keturženklė, tai $a\neq 0$, $b\neq 0$, o dėl to, kad ji baigiasi nuliu,— vieno dauginamojo paskutinis skaitmuo turi būti 5.

Sakykime, kad $b=5$. Gauname lygybę $\overline{a5}\cdot\overline{5a}=2430$. Patikriname a reikšmes, lygias 2, 4, 6, 8. Lygybę tenkina tik $a=4$. Ieškomas skaičius 45. Tuomet antras dauginamasis būtų 54. Akivaizdu, kad 54 gali būti ir ieškomas skaičius (daugybos perstatymo dėsnis). Šį sprendinį kaip tik ir gautume iš lygybės $\overline{5b}\cdot\overline{b5}=$ $=2430$, tarę, kad $a=5$.

A t s a k y m a s: 45; 54.

15.1. Sakykime, kad visas atstumas lygus $4a$ km. Ketvirtadalį šio kelio automobilis nuvažiavo per $\frac{a}{45}$ h, o visą kitą kelią — per $\frac{3a}{75}$ h. Vidutinis automobilio greitis $\dfrac{4a}{\frac{a}{45}+\frac{3a}{75}}=\dfrac{4}{\frac{1}{45}+\frac{1}{25}}=64\frac{2}{7}\approx$ $\approx 64{,}3$ (km/h).

15.2. Visiems nelyginiams vienaženkliams skaičiams užrašyti reikėjo 5 skaitmenų.

$104-5=99$ skaitmenimis mokinys parašė dviženklius ir triženklius skaičius.

Vienoje dešimtyje yra 5 nelyginiai dviženkliai skaičiai, o devyniose dešimtyse — 45 nelyginiai dviženkliai skaičiai, kuriems parašyti reikia 90 skaitmenų.

$99-90=9$ skaitmenimis jis parašė nelyginius triženklius skaičius, iš kurių mažiausias yra 101, o didžiausias 105. Vadinasi, sąsiuvinyje yra 106 puslapiai.

Skaitmuo 7 vienetų vietoje parašytas 10 kartų ir dešimčių vietoje — 5 kartus, iš viso 15 kartų.

A t s a k y m a s: 106 puslapiai, 15 kartų.

16.1. Sakykime, kad distancijos ilgis lygus x m. Justo greitis $\frac{x}{75}$ m/s, Vyto — $\frac{x}{80}$ m/s.

$48 \cdot \frac{x}{75} - 48 \cdot \frac{x}{80} = 20,$

$x = 500.$

Justas per minutę nubėga $\frac{500 \cdot 60}{75} = 400$ (m), Vytas — $\frac{500 \cdot 60}{80} = 375$ (m).

16.2. Dviejų dauginamųjų sandauga yra nelyginis skaičius tik tada, kai abu dauginamieji nelyginiai, o dviejų nelyginių skaičių suma yra lyginis skaičius.

17.1. Sakykime, kad vienos stačiakampio kraštinės ilgis lygus x cm, tada kitos — $(9-x)$ cm.

$0{,}8x + 1{,}25(9-x) = 9,$

$x = 5.$

Stačiakampio plotas $5 \cdot 4 = 20$ (cm^2).

17.2. 5, nes bet kurio nelyginio skaičiaus ir 5 sandauga baigiasi penkiais.

18.1. P i r m a s b ū d a s. a) $2n+1$ — nelyginiai skaičiai. O nelyginius skaičius padaliję iš 4, gauname liekaną 1 arba 3, todėl 3^{2n+1} baigsis 3 arba 7 (žr. V—VI klasės 78.2 uždavinio sprendimą).

b) 4 pakėlus lyginiu laipsniu, paskutinis skaitmuo yra 6, o pakėlus nelyginiu — 4. Vadinasi, 4^{2n+1} visada baigsis 4.

c) 5^{7n+2} baigsis 5, nes, penkis pakėlus bet kuriuo laipsniu, paskutinis skaitmuo yra 5.

A n t r a s b ū d a s: a) $3^{2n+1} = 3^{2n} \cdot 3 = 9^n \cdot 3;$

9^n baigiasi 1 arba 9, todėl $9^n \cdot 3$ baigiasi 3 arba 7.

b) $4^{2n+1} = 16^n \cdot 4;$

16^n baigiasi 6, nes $6 \cdot 6 = 36$.

Vadinasi, $16^n \cdot 4$ baigiasi 4 $(4 \cdot 6 = 24)$.

A t s a k y m a s: a) 3 arba 7; b) 4; c) 5.

18.2. Kadangi reiškinio teigiamą dėmenį keičia neigiamas, tai iš viso jis turi $500+499=999$ dėmenis. Vadinasi, paskutinis dėmuo — skaičius $\frac{3}{1001}$. Tada $2 - \left(\frac{1000}{1001} - \frac{999}{1001}\right) - \left(\frac{998}{1001} - \frac{997}{1001}\right) - \ldots = 2 - \frac{1}{1001} - \frac{1}{1001} - \ldots = 2 - \frac{1}{1001} \cdot 499 = 1\frac{502}{1001}$.

19.1. Sakykime, kad a ir $ab+4$ dalijasi iš natūraliojo skaičiaus d; tada ir ab dalijasi iš d (nes a dalijasi iš d). Jei $ab+4$ ir ab dalijasi iš d, tai ir jų skirtumas $(ab+4)-ab=4$ dalijasi iš d. Taigi d lygus 1, 2 arba 4. Bet 2 ir 4 negali būti skaičiaus a dalikliai, nes a — nelyginis. Vadinasi, $d=1$. Taigi a ir $ab+4$ tarpusavy pirminiai skaičiai.

19.2. Pavyzdžiui, pasirinkime vieną skaičių, kurio skaitmenų suma 232, ir po jo einantį skaičių, kurio skaitmenų suma 116. Pirmas skaičius vienetu mažesnis už antrą. Pridėjus 1 prie mažesniojo skaičiaus, jo skaitmenų suma sumažėja 116. Tai būna tik tada, kai skaičius baigiasi devynetais. Jų turi būti 13, nes tokio kiekio devynetų suma lygi 117. Prieš šiuos devynetus gali būti bet kurie skaitmenys, pakanka, kad jų suma būtų lygi 115 (1 mažiau negu 116).

Pavyzdžiui, 99 999 999 999 979 999 999 999 999 ir
99 999 999 999 980 000 000 000 000.

20.1. Sakykime, kad skaičių $m+1$ ir $2m+1$ didžiausias bendrasis daliklis lygus d. Tada ir skaičius $2(m+1)$ dalijasi iš d. Kadangi $2(m+1)$ ir $2m+1$ dalijasi iš d, tai ir jų skirtumas $2(m+1)-(2m+1)=1$ dalijasi iš d. Tai rodo, kad d gali būti tik 1. Vadinasi, trupmena $\frac{m+1}{2m+1}$, kai $m\in N$, nesuprastinama.

20.2. Vieno skaičiaus gale parašykime 14 devynetų, o prieš juos skaitmenis, kurių suma lygi 124 arba bet kuriam skaičiui, kurį padalijus iš 125, gaunama liekana 124. Tada kito skaičiaus (vienetu didesnio negu pirmas) gale bus 14 nulių.
Pavyzdžiui, 9 999 999 999 999 799 999 999 999 999 ir
9 999 999 999 999 800 000 000 000 000.

21.1. Jei a ir b nesidalija iš 3, tai šios dalybos liekanos gali būti 1 ir 2. Jei liekanos lygios, tai $a-b$ dalijasi iš 3. Įsitikinsime. Sakykime, $a=3k+1$, $b=3m+1$. Tada $a-b=3k+1-3m-1=3(k-m)$ dalijasi iš 3.

Jei a ir b padaliję iš 3 gauname nelygias liekanas, tai $a+b$ dalijasi iš 3. Įsitikinsime. Sakykime, $a=3k+1$, $b=3m+2$. Tada $a+b=3k+1+3m+2=3(m+k+1)$ dalijasi iš 3. Visur k ir m natūralieji skaičiai arba nulis.

21.2. Reiškinį $3:3:3$ galima suskliausti dvejaip: $(3:3):3$ ir $3:(3:3)$. Atlikę veiksmus, gauname du skaičius: $\frac{1}{3}$ ir 3.
Kai reiškinyje trys dalybos ženklai, veiksmų atlikimo tvarką galime nustatyti šešiais būdais.

Antro reiškinio suskliautimo būdus ir reiškinių reikšmes rodo šios lygybės (mažesniu šriftu surinkti skaičiai žymi veiksmų atlikimo tvarką):

$$((3 \overset{1}{:} 3) \overset{2}{:} 3) \overset{3}{:} 3 = \frac{1}{9},$$

$$(3 \overset{1}{:} 3) \overset{3}{:} (3 \overset{2}{:} 3) = 1 \text{ arba } (3 \overset{2}{:} 3) \overset{3}{:} (3 \overset{1}{:} 3) = 1,$$

$$(3 \overset{2}{:} (3 \overset{1}{:} 3)) \overset{3}{:} 3 = 1,$$

$$3 \overset{3}{:} ((3 \overset{1}{:} 3) \overset{2}{:} 3) = 9,$$

$$3 \overset{3}{:} (3 \overset{2}{:} (3 \overset{1}{:} 3)) = 1.$$

Taigi reiškinyje $3:3:3:3$ skliaustus galima parašyti iš viso penkiais skirtingais būdais: $((3:3):3):3$; $(3:3):(3:3)$; $(3:(3:3)):3$; $3:((3:3):3)$; $3:(3:(3:3))$.

Gauname tris skirtingas reiškinių reikšmes: $\frac{1}{9}$, 1, 9.

22.1. $(27^{10}-5\cdot 81^4\cdot 3^{12}+4\cdot 9^8\cdot 3^8):(41\cdot 3^{24})=\frac{3^{30}-5\cdot 3^{28}+4\cdot 3^{24}}{41\cdot 3^{24}}=$

$$=\frac{3^{24}(3^6-5\cdot 3^4+4)}{41\cdot 3^{24}}=\frac{729-405+4}{41}=\frac{328}{41}=8.$$

22.2. Natūraliųjų skaičių kvadratų lentelėje randame triženklius skaičius 121, 144, 169, 441, 484, 676, 961, kurie, parašyti atvirkščia tvarka, taip pat yra natūraliųjų skaičių kvadratai.

Jei palei kurią nors kvadrato įstrižainę būtų parašytas vienas iš trijų skaičių 121, 484, 676, tai kiti skaitmenys būtų parenkami vienareikšmiškai:

1	2	1
2	2	2
1	2	1

4	8	4
8	8	8
4	8	4

6	7	6
7	7	7
6	7	6

Jei palei kurią nors kvadrato įstrižainę gautume skaičių 144 arba 441, tai užpildyti kvadratą galėtume dar keturiais būdais:

1	2	1
4	4	4
4	8	4

1	4	4
2	4	8
1	4	4

4	8	4
4	4	4
1	2	1

4	4	1
8	4	2
4	4	1

Jei palei kurią nors kvadrato įstrižainę gautume skaičių 169 arba 961, tai, norėdami užpildyti kitus langelius, turėtume rašyti triženklį skaičių — natūraliojo skaičiaus kvadratą, kuris prasideda ir baigiasi skaitmeniu 9. Bet tokio natūraliojo skaičiaus kvadrato nėra. Taigi yra 7 lentelės užpildymo būdai.

23.1. Atsakymas: 57.

23.2. Sakykime, kad $\overline{aabb}$ yra ieškomas skaičius.
$\overline{aabb}=1000a+100a+10b+b=11(100a+b)$.
Matome, kad jis dalijasi iš 11. Iš sąlygos žinome, kad ieškomas skaičius yra natūraliojo skaičiaus kvadratas, o 11 — pirminis skaičius, todėl $\overline{aabb}$ turi dalytis ir iš 11^2. Tada $11(100a+b)=$ $=11^2t^2$; iš čia $100a+b=11t^2$ arba, kitaip sakant, $99a+(a+b)$ dalijasi iš 11. Vadinasi, $a+b$ turi dalytis iš 11. Kadangi $0<a\leqslant 9$, $0\leqslant b\leqslant 9$, tai $a+b=11$.

Kadangi skaičiaus kvadratas gali baigtis tik skaitmenimis 0, 1, 4, 5, 6, 9, tai mums reikia perrinkti $b=4$, 5, 6, 9.

Kai $b=4$, tai $a=7$ ir $7744=8^2\cdot 11^2$ tenkina sąlygą.

Skaičiai 6655 ir 5566 nėra natūraliojo skaičiaus kvadratai, nes pirmasis dalijasi iš 5, bet nesidalija iš 25, o antrasis lyginis, bet nesidalija iš 4.

$2299=11^2\cdot 19$ taip pat ne kvadratas.

Atsakymas: $7744=88^2$.

24.1. Pirminį skaičių, didesnį už 2 ir 3, padalijus iš 6, liekana gali būti tik 1 arba 5. Mat skaičiai, kuriuos padalijus iš 6 gaunama liekana 2, 3, 4, gali būti parašyti šitaip: $6a+2$, $6b+3$, $6c+4$. Tačiau tokia formule išreikšti skaičiai negali būti pirminiai, nes jie dalijasi atitinkamai iš 2; 3; 2. Vadinasi, kiekvieno pirminio skaičiaus (išskyrus 2 ir 3) išraiška yra $6n+1$ arba $6n+5$. Atvirkščias teiginys klaidingas. Pavyzdžiui, $6n+1$, kai $n=0$, nei pirminis, nei sudėtinis; kai $n=4$, yra sudėtinis; $6n+5$, kai $n=5$, taip pat yra sudėtinis skaičius.

24.2. $5-\left(\frac{1002}{1003}-\frac{1001}{1003}\right)-\left(\frac{1000}{1003}-\frac{999}{1003}\right)-\ldots=5-\frac{1}{1003}-\frac{1}{1003}-\ldots=5-$
$-\frac{1002-34}{2}\cdot\frac{1}{1003}=5-\frac{484}{1003}=4\frac{519}{1003}$.

25.1. Pirminį skaičių, didesnį už 3, galima parašyti šitaip: $6k+1$ arba $6k+5$ (k — neneigiamas sveikasis skaičius). Jei mažesnysis iš dviejų pirminių skaičių būtų $6k+1$, tai didesnysis nebūtų pirminis: $6k+3=3(2k+1)$. Vadinasi, mažesnysis skaičius $6k+5$, didesnysis $6k+7=6(k+1)+1$, o jų suma $12k+12$ dalijasi iš 12.

25.2. Pradinio kvadrato kraštinės ilgį pažymėkime x, tada $1{,}2x$ — padidinto kvadrato kraštinės ilgis.

Sakykime, kad pradinio kvadrato plotas sudaro 100%, tada didesniojo kvadrato plotas sudarys $(1{,}44x^2 : x^2) \cdot 100 = 144$ (%). $144 - 100 = 44$ (%).

Atsakymas: 44%.

26.1. Iš trijų iš eilės einančių natūraliųjų skaičių bent vienas dalijasi iš 2, vienas — iš 3. Vadinasi, jų sandauga dalijasi iš 6.

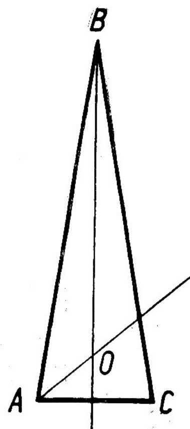
Įrodysime, kad tokia sandauga dalijasi iš 24, kai mažiausias skaičius yra lyginis: $2n(2n+1)(2n+2) = 4n(n+1)(2n+1)$. Kadangi ir šiuo atveju vienas iš dauginamųjų dalijasi iš 3, sandauga $n(n+1)$ — lyginė, tai $4n(n+1)(2n+1)$ dalijasi iš $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Jei pirmas iš trijų vienas po kito einančių natūraliųjų skaičių yra nelyginis tai lyginis tik antras, ir sandauga dalysis iš 24 tik tada, kai jis dalysis iš 8.

26.2. $3^{303} = 3 \cdot 3^{302} = 3 \cdot 9^{151} > 3 \cdot 8^{151} =$
$= 3 \cdot 2^{453} > 2^{454}$.

27.1. $AB = BC$. Spinduliai AO ir BO yra trikampio kampų A ir B pusiaukampinės; $\angle AOB = 130°$ (31 pav.). Iš trikampio AOB sužinome, kad $\angle ABO + \angle BAO = 180° - 130° = 50°$. Tada dvigubai didesnių kampų ABC ir BAC laipsninių matų suma lygi 100°. Vadinasi, trikampio ABC trečio kampo C laipsninis matas lygus 80°. Bet $\angle A = \angle C = 80°$. Tada $\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) = 20°$.

Atsakymas: 80°, 80°, 20°.

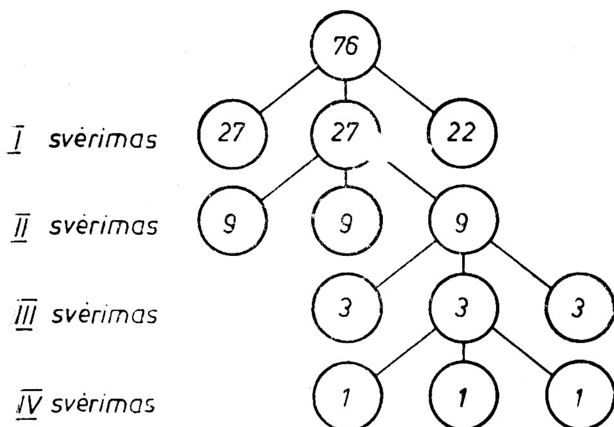


31 pav.

27.2. $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{200}\right) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \ldots + \frac{1}{200}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \ldots + \frac{1}{200}.$$

28.1. Kiekvienas turas — 8 rungtynės, todėl po 16 turų buvo sužaistos $8 \cdot 16 = 128$ rungtynės. Jei visos rungtynės būtų pasibaigusios pergalėmis, tai komandos būtų surinkusios $128 \cdot 2 = 256$ taškus. Tačiau surinkta $256 - 222 = 34$ taškais mažiau. Vadinasi, lygiosiomis baigėsi 34 rungtynės.

28.2. Jeigu lengvesnis rutuliukas pirmu svėrimu patenka į 27 rutuliukų grupę, tai tolesnį sprendimą iliustruoja 32 paveikslas (o išsamiau paaiškinta sprendžiant V—VI klasės 57.2 uždavinį).



32 pav.

Jeigu po pirmojo svėrimo lengvesnis rutuliukas patenka į 22 rutuliukų grupę, tai ją papildome dar 5 rutuliukais, o iš 27 jau mokame išrinkti lengvesnį.

29.1. Dviženkliai skaičiai, kurie yra sveikųjų skaičių kvadratai, prasideda skaitmenimis 1, 2, 3, 4, 6, 8, o baigiasi skaitmenimis 1, 4, 5, 6, 9. Skaitmenys b, c, d turi priklausyti ir vienai, ir kitai nurodytų skaitmenų grupei. Vadinasi, skaitmenys b, c, d gali būti tik 1, 4, 6. Kadangi $\overline{bc}$, $\overline{cd}$ yra sveikųjų skaičių kvadratai, tai $b=1$, $c=6$, $d=4$ ir $\overline{bcd}=164$. Tada skaitmenys a ir e gali būti atitinkamai tik 8 ir 9. Vadinasi, ieškomas skaičius yra 81 649.

29.2. Kadangi $a+b<a-b$, tai $b<0$. Iš $ab<a+b$ ir $b<0$ gauname $a>0$, nes kitaip nelygybė $ab<a+b$ būtų neteisinga.

A t s a k y m a s: $a>0$, $b<0$.

30.1. Mažiausia dviejų dviženklių skaičių suma lygi $10+10=20$, o didžiausia — $99+99=198$. Gausime 80 dviženklių sumų (tai skaičiai nuo 20 iki 99) ir 99 triženkles sumas (tai visi skaičiai nuo 100 iki 198).

A t s a k y m a s: 80 dviženklių, 99 triženkles.

30.2. Pažymėkime trečios trikampio kraštinės ilgį raide a. Pagal trikampio nelygybę $a<5+1$ ir $a+1>5$, t. y. $4<a<6$. Vadinasi, $a=5$.

A t s a k y m a s: 5.

31.1. Apskaičiuokime daugiaženklio skaičiaus skaitmenų sumą. Skaičius nuo 1 iki 98 sugrupuokime taip: 1 ir 98, 2 ir 97, ..., 49 ir 50. Turime 49 grupes, ir kiekvienos grupės skaitmenų suma lygi 18. Kitų trijų skaičių — 99, 100 ir 101 — skaitmenų suma yra 21. Taigi daugiaženklio skaičiaus skaitmenų suma lygi $18 \cdot 49 + 21 = 903$. Gautas daugiaženklis skaičius dalijasi iš 3, bet nesidalija iš 9, vadinasi, jis yra sudėtinis, tačiau nėra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

31.2. Iš sąlygos aišku, kad ieškomas skaičius a yra dviženklis ir mažesnis už 60. Vadinasi, skaičius $b \leqslant 5+9=14$. Sakykime, kad $a=10x+y$, tada $b=x+y$.

Jeigu b vienaženklis, tai jo skaitmenų suma taip pat bus $x+y$, nes vienaženklio skaičiaus skaitmenų suma lygi pačiam skaičiui. Šiuo atveju skaičiaus a skaitmenis surasime iš lygties:
$(10x+y)+(x+y)+(x+y)=60$,
$4x+y=20$,
$x=5-\frac{y}{4}$.
Kai $y=0$; 4; 8, gauname atitinkamai $x=5$; 4; 3. Sprendiniai yra skaičiai $a=50$; $a=44$. Skaičius 38 nėra sprendinys, nes jo skaitmenų suma dviženklė.

Jeigu skaičius b dviženklis, tai jo skaitmenų suma lygi $x+y-9$. Mat dviženklių skaičių, mažesnių už 20, skaitmenų suma devyniais vienetais mažesnė už patį skaičių. Sudarome lygtį:
$(10x+y)+(x+y)+(x+y-9)=60$,
$4x+y=23$,
$y=23-4x$.

Kadangi x ir y teigiami vienaženkliai skaičiai, tai $x=5$; 4, o $y=3$; 7. Gauname sprendinį $a=47$. Skaičius 53 nėra sprendinys, nes jo skaitmenų suma vienaženklė.

Atsakymas: 50; 47; 44.

32.1. Remdamiesi sąlyga rašome:

$$\left(\left(\frac{392}{a}-a\right):a-a\right):a-a=-a,$$

$$\left(\frac{392}{a}-a\right):a-a=0,$$

$$392=(a^2+a)\cdot a,$$

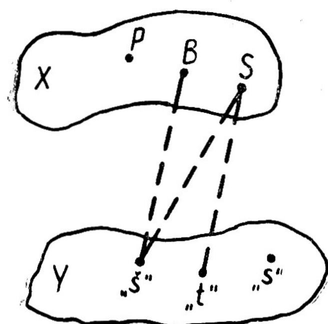
$$a^2(a+1)=2^3\cdot 7^2.$$

Akivaizdu, kad $a=7$ tinka. Jei $a>7$, tai kairioji pusė per didelė, jei $a<7$ — per maža.

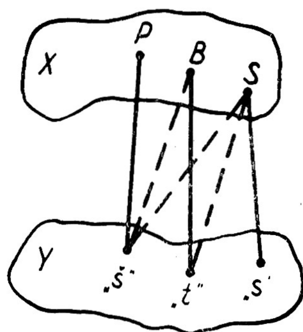
Atsakymas: 7.

32.2. Šį uždavinį būtų galima spręsti sudarant pavardžių ir profesijų atitikimo lentelę.

Supažindiname su sprendimo būdu taikant grafą. Sakykime, kad pavardžių aibė X, profesijų aibė Y (jų elementai paveiksle pažymėti taškais). Aibės X elementus pažymėkime raidėmis P, B, S (Petraitis, Budreika, Stankus); aibės Y elementus — „*š*", „*t*", „*s*" (šaltkalvis, tekintojas, suvirintojas). Jei vienos aibės elementą atitinka kitos aibės elementas, juos sujungiame ištisine linija, o jei neatitinka — brūkšnine. Gauname 33 paveiksle pavaizduotą schemą. Suprantama, kad kiekvieną aibės X elementą atitinka tik vienas aibės Y elementas, ir atvirkščiai, kiekvieną aibės Y elementą atitinka tik vienas aibės X elementas. Vadinasi, jei kuris nors elementas sujungtas su kitos aibės dviem elementais brūkšninėmis linijomis, tai su jos trečiu elementu jį būtina sujungti ištisine linija. Kadangi aibės X elementas S sujungtas su aibės Y elementais „*š*" ir „*t*" brūkšninėmis linijomis, tai su tos aibės trečiu elementu „*s*" jis turi būti sujungtas ištisine linija. Kadangi elementas „*š*" sujungtas brūkšninėmis linijomis su elementais B ir S, tai su trečiu aibės X elementu P jis turi būti sujungtas ištisine linija. Dabar aišku, kad elementą B reikia sujungti ištisine linija su elementu „*t*" (34 pav.).



33 pav.



34 pav.

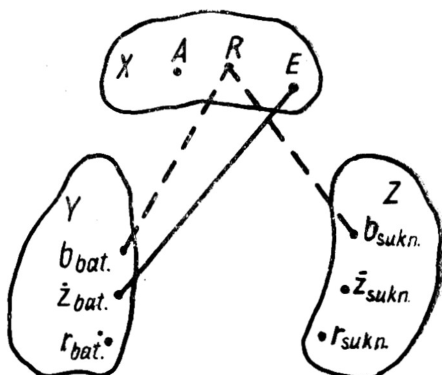
Atsakymas: Petraitis — šaltkalvis, Budreika — tekintojas, Stankus — suvirintojas.

33.1. Sakykime, kad paprastas pieštukas kainuoja x ct, o spalvotas — y ct. Iš uždavinio sąlygos aišku, kad $y \leqslant 10$, $2y > 5x$ ir $3x > y$. Iš čia: $6x > 2y$. Todėl $5x < 2y < 6x$.

Kai $x = 1$ arba $x = 2$, dvigubų nelygybių $5 < 2y < 6$ ir $10 < 2y < 12$ sveikųjų sprendinių aibės tuščios. Kai $x = 3$, tai nelygybė $15 < 2y < 18$ turi vienintelį sveikąjį sprendinį $y = 8$. Kai $x \geqslant 4$, gauname $2y > 5x \geqslant 20$. Vadinasi, $2y > 20$ ir $y > 10$, o tai prieštarauja sąlygai. Taigi paprastas pieštukas kainuoja 3 ct.

33.2. Sudarykime vardų, batelių spalvų ir suknelių spalvų aibes. Pažymėkime jas atitinkamai X, Y, Z. Aibės X elementus pažymėkime raidėmis A, R, E, aibės Y elementus — $b_{\text{bat.}}$, $ž_{\text{bat.}}$, $r_{\text{bat.}}$, aibės Z elementus — $b_{\text{sukn.}}$, $ž_{\text{sukn.}}$, $r_{\text{sukn.}}$.

Kiekvieną vienos aibės elementą atitiks tik po vieną kitų dviejų aibių elementą. Vadinasi, reikės nubraižyti tris „ištisinius" trikampius, kurių po vieną viršūnę yra X, Y, Z aibėse.

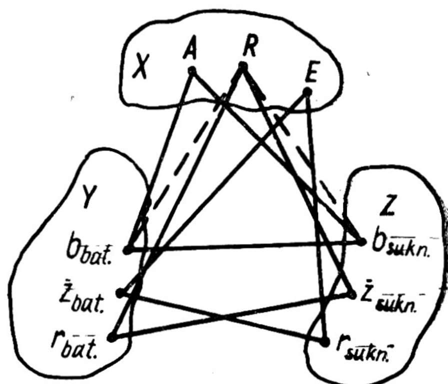


35 pav.

35 paveikslo grafas vaizduoja tik sąlygoje minimus elementų sąryšius.

Kadangi Eglė avi žalius batelius, o Rasos bateliai nėra balti, tai Rasos bateliai rudi.

36 paveikslo elementus R ir $r_{\text{bat.}}$ sujungiame ištisine linija. Iš čia išplaukia, kad Asta avi baltus batelius. Sujungiame atitinkamus elementus ištisine linija.



36 pav.

Astos suknelė ir bateliai vienos spalvos, todėl ji vilki balta suknele. Vieną „ištisinį" trikampį jau gavome. Kadangi ir Rasos, ir Eglės suknelė ir bateliai skirtingų spalvų, tai Rasos suknelė žalia, o Eglės — ruda. Gavome dar du „ištisinius" trikampius.

Atsakymas: Astos balta suknelė ir balti bateliai, Rasos žalia suknelė ir rudi bateliai, Eglės ruda suknelė ir žali bateliai.

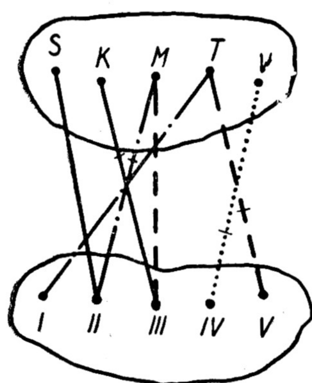
34.1. Turime $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot20>2\cdot5\cdot10\cdot11\cdot12\cdot\ldots\cdot20>10^{12}$, $1+2+3+\ldots+1\,000\,000<1\,000\,000\cdot1\,000\,000=10^{12}$. Vadinasi, $1\times2\cdot3\cdot\ldots\cdot20>1+2+3+\ldots+1\,000\,000$.

34.2. Sakykime, kad teisingas teiginys „Simas užėmė antrą vietą". Sudarome grafą: pirmo klasės draugo pasakymą vaizduojame ištisinėmis linijomis, antro — brūkšninėmis, trečio — brūkšninėmis-taškinėmis, ketvirto — taškinėmis. Klaidingus teiginius

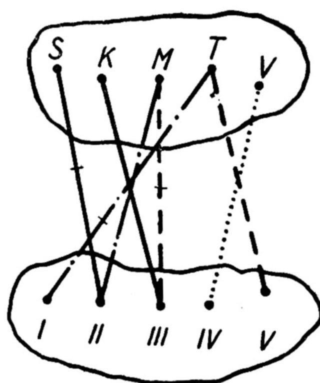
vaizduojančias linijas perbraukiame brūkšneliu (37 pav.). Jei Simas užėmė antrą vietą, tai Marius negalėjo užimti antros vietos. Tada teiginys „Tomas užėmė pirmą vietą" yra teisingas. Vadinasi, antras draugas neteisingai teigė, kad Tomas užėmė penktą vietą. Taigi Marius užėmė trečią vietą. Kadangi teiginys „Vladas užėmė ketvirtą vietą" klaidingas, tai Vladas galėjo užimti tik penktą vietą. Ketvirta vieta atiteko Kaziui.

Sakykime, kad teiginys „Kazys užėmė trečią vietą" yra teisingas. Sudarę šio atvejo grafą (38 pav.), gauname tokį atsakymą: Marius užėmė antrą vietą, Kazys — trečią, Vladas — ketvirtą, Tomas — penktą, Simas — pirmą.

Uždavinys turi du sprendinius.



37 pav.



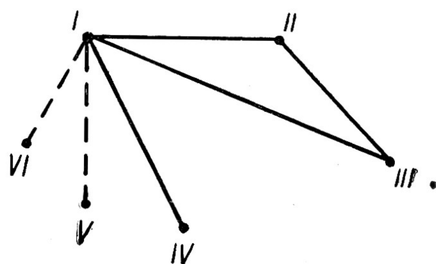
38 pav.

Atsakymas:

Pirma vieta	Tomas	Simas
Antra vieta	Simas	Marius
Trečia vieta	Marius	Kazys
Ketvirta vieta	Kazys	Vladas
Penkta vieta	Vladas	Tomas

35.1. Jei dalmuo $x:y$ būtų didesnis už 2, tai ir skaitmuo x būtų didesnis už 2, o kairiojoje lygties pusėje esantis skaičius turėtų mažiausiai penkis skaitmenis. Antra vertus, aišku, kad dalmuo nelygus 1. Vadinasi, $x:y=2$. Dabar reikia išnagrinėti atvejus, kai skaičius $\overline{xy}$ priklauso aibei, kurios elementai 21, 42, 63, 84. Patikrinę įsitikiname, kad $\overline{xy}=63$, tada $x=6$, $y=3$, $z=9$, $t=6$, $u=9$.

35.2. Žmones pažymėkime taškais. Jeigu žmonės pažįstami, tai juos atitinkančius taškus sujunkime ištisinėmis linijomis, jei nepažįstami — brūkšninėmis linijomis. Iš pirmojo taško turi išeiti penkios linijos, nors trys jų būtinai bus vienos rūšies, pavyzdžiui, ištisinės. Taškus, sujungtus ištisinėmis linijomis su pirmuoju tašku, pažymėkime skaičiais II, III ir IV. Jei du jų, pavyzdžiui, II ir III (39 pav.), irgi sujungti ištisinėmis linijomis, tai taškai I, II ir III žymi tris vieną su kitu pažįstamus žmones. Jeigu nė viena taškų II, III ir IV pora nesujungta ištisine linija, tai šie taškai vaizduoja tris nepažįstamus žmones.



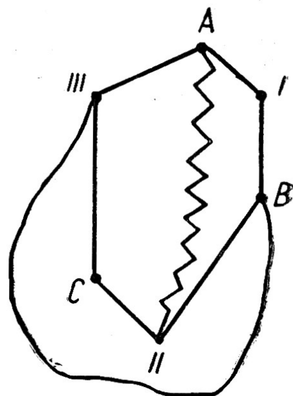
39 pav.

36.1. Vietoj reiškinio skaičiaus 74 parašome $a+1$:
$a^{31}-(a+1)a^{30}+(a+1)a^{29}-\ldots+(a+1)a^{17}-(a+1)a^{16}+a\cdot a^{15}+$
$+15=a^{31}-a^{31}-a^{30}+a^{30}+a^{29}-\ldots+a^{18}+a^{17}-a^{17}-a^{16}+a^{16}+15=$
$=15.$

Atsakymas: 15.

36.2. Pažymėkime namus taškais A, B, C, o šulinius — taškais I, II, III (40 pav.). Sujunkime tašką A su tašku I, tašką I su tašku B, tašką B su tašku II, tašką II su tašku C, tašką C su tašku III ir tašką III su tašku A. Gauname uždarąją liniją. Dabar reikia tašką A sujungti su tašku II. Tarkime, kad juos jungianti linija nubrėžta viduje uždarosios linijos. Tašką B reikia sujungti su tašku III. Ši linija neturi kirsti kitų, vadinasi, ji turi eiti išorėje sklypo, kurį riboja uždaroji linija. Tada taško C su tašku I negalima sujungti jokia linija, nekertančia kitų.

Atsakymas: negalima.



40 pav.

37.1. $(3a+1)(3b+2)=3(3ab+2a+b)+2$;
$3ab+2a+b$ — natūralusis skaičius;
$3(3ab+2a+b)$ — dalijasi iš 3;
$3(3ab+2a+b)+2$ padaliję iš 3, gausime liekaną 2.

37.2. Skaitiklio skaitmenų suma lygi 30, todėl jis dalijasi iš 3. Vardiklio nelyginėse vietose esančių skaitmenų sumos ir jo lyginėse vietose esančių skaitmenų sumos skirtumas lygus 11 (32—

$-21=11$). Vadinasi, vardiklis dalijasi iš 11 (pagal dalumo iš 11 požymį). Taigi $\frac{116\,690\,151}{427\,863\,887}=\frac{38\,896\,717\cdot 3}{38\,896\,717\cdot 11}=\frac{3}{11}$.

38.1. Kadangi $3193=31\cdot 103$, 31 ir 103 — pirminiai skaičiai, o naujoji žaislo kaina mažesnė už 50 ct, tai parduotuvėje liko arba 103 žaislai po 31 ct, arba 3193 žaislai po 1 ct. Pirmu atveju žaislas atpigo 19 ct, arba 38%. Antru atveju žaislas atpigo 49 ct, arba 98%.

Atsakymas: 38% arba 98%.

38.2. Jeigu x — vienetų skaitmuo, o y — dešimčių skaitmuo, tai $10y+x=14y$, arba $4y=x$.

Vienetų skaitmuo turi būti 4 kartus didesnis už dešimčių skaitmenį. Kadangi x ir y vienaženkliai natūralieji skaičiai, tai galimi tik du atvejai: $y=1$, $x=4$ ir $y=2$, $x=8$. Yra du tokie dviženkliai skaičiai: 14 ir 28.

39.1. $(2n+1)^2-(2n-1)^2=8n$. Vienas sandaugos $8n$ dauginamasis dalijasi iš 8, o kitas — natūralusis skaičius. Vadinasi, sandauga dalijasi iš 8.

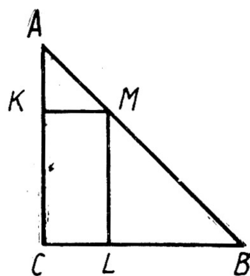
39.2. Sakykime, kad nominalinė knygos kaina 100%. Knygynas gavo knygų už $100-20=80$ (%) nominalinės kainos. Apskaičiuojame, kiek procentų skaičiaus 80 sudaro skaičius 20.

Atsakymas: 25%.

40.1. Ieškomi skaičiai turi dalytis ir iš 9, ir iš 20. Todėl ieškomo skaičiaus paskutinis skaitmuo turi būti 0, prieš jį turi eiti lyginis skaitmuo, o ieškomo skaičiaus skaitmenų suma turi dalytis iš 9. Tokie skaičiai yra 900 . . . 000, 700 . . . 020, 500 . . . 040, 300 . . . 060, 100 . . . 080.

40.2. $\angle C=90°$, $AC=CB=8$ cm, $MK\perp AC$, $ML\perp CB$, $M\in AB$. Lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo lygūs, todėl $\angle A=\angle B=90°:2=45°$ (41 pav.).

Trikampis AMK status, todėl $\angle AMK=90°-\angle A=90°-45°=45°$. Taigi trikampis AMK lygiašonis ir $MK=AK$. Pagal brėžinį keturkampis $KMLC$ stačiakampis, todėl $ML=KC$. Vadinasi, $MK+ML=AK+KC=AC=8$ cm.



41 pav.

41.1. Iš sąlygos aišku, kad pirmas keleivis didesniu (5 km/h) greičiu nuėjo daugiau kaip pusę viso kelio, o antras šiuo greičiu — tik pusę kelio. Vadinasi, pirmas atėjo į B anksčiau už antrą.

41.2. $(x^3+ax-b)^3-3(x^3+ax-b)^2(ax-b)+3(x^3+ax-b)(ax-b)^2-(ax-b)^3-(x^6+5x^3+25)(x^3-5)=((x^3+ax-b)-(ax-b))^3-((x^3)^3-5^3)=x^9-x^9+125=125.$

42.1. Sakykime, kad $\overline{abcd}$ ir $\overline{xyz}$ — ieškomi skaičiai. Sąlygoje minimą jų sumą parašykime stulpeliu:

$$+\begin{array}{r} a\ b\ c\ d \\ x\ y\ z \\ \hline 4\ 1\ 9\ 0 \end{array}\ (1) \qquad +\begin{array}{r} d\ c\ b\ a \\ z\ y\ x \\ \hline 6\ 9\ 8\ 0 \end{array}\ (2)$$

Iš (1) sumos aišku, kad a lygus 3 arba 4, iš (2) sumos — $a+x=10$, todėl x lygus 7 arba 6; vadinasi, (1) sumos trečiajame skyriuje vienetas perkeliamas į kitą skyrių, taigi $a=3$ ir $x=7$. Iš (2) sumos d lygus 5 arba 6, iš (1) sumos — $z=10-d$, todėl z lygus 5 arba 4; vadinasi, (2) sumos trečiajame skyriuje vienetas neperkeliamas, taigi $d=6$, $z=4$.

Įrašome gautus rezultatus:

$$+\begin{array}{r} 3\ b\ c\ 6 \\ 7\ y\ 4 \\ \hline 4\ 1\ 9\ 0 \end{array}\ (3) \qquad +\begin{array}{r} 6\ c\ b\ 3 \\ 4\ y\ 7 \\ \hline 6\ 9\ 8\ 0 \end{array}\ (4)$$

Dabar iš (3) sumos trečiojo skyriaus matome, kad b lygus 3 arba 4. Iš (4) sumos antrojo skyriaus gauname $b+y=7$; tada iš (4) sumos trečiojo skyriaus apskaičiuojame c: $c=5$, iš (3) sumos antrojo skyriaus — y. Jis lygus 3. Vadinasi, $b=4$. Patikrinę matome, kad skaičiai 3456 ir 734 atitinka sąlygą.

Atsakymas: 3456; 734.

42.2. Jei m ir n abu lyginiai (arba abu nelyginiai), tai $3m+n+4=(3m+n)+4$ — lyginis skaičius (dviejų lyginių skaičių suma). Vadinasi, $(3m+n+4)^4$ dalijasi iš 16. Jei m yra lyginis, o n — nelyginis arba atvirkščiai, tai $5m+3n+1$ — lyginis skaičius, o $(5m+3n+1)^4$ dalijasi iš 16. Taigi su visomis sveikosiomis m ir n reikšmėmis nurodyto reiškinio reikšmė dalijasi iš 16.

43.1. Atsakymas: a) $\frac{1}{4}$; b) kai $a=-2$, reiškinys neturi prasmės.

43.2. Nurodymas. 54° kampą papildykite iki stataus ir nubrėžkite papildomojo kampo pusiaukampinę.

44.1. Sakykime, nupirkta n gaublių. Tada $4n+1{,}2m=50$.

$$n=\frac{50-1{,}2m}{4}=\frac{125-3m}{10};$$

čia m ir n gali įgyti sveikąsias neneigiamas reikšmes.
Kai $m=5$, tai $n=11$;
kai $m=15$, tai $n=8$;
kai $m=25$, tai $n=5$;
kai $m=35$, tai $n=2$.

Atsakymas: 11, 8, 5 arba 2 gaubliai; $m=5$, 15, 25, 35.

44.2. Priklausomai nuo liekanos, kuri gaunama skaičių p padalijus iš 3, galimi trys atvejai:

1) $p=3n$, bet $3n$ pirminis tik tada, kai $n=1$, tuomet $p^3+p^2+11p+2=71$ — pirminis skaičius;

2) $p=3n-1$, tada $p^3+p^2+11p+2=(3n-1)^3+(3n-1)^2+11(3n-1)+2=9(3n^3-2n^2+4n-1)$ — sudėtinis skaičius;

3) $p=3n+1$, tada $p^3+p^2+11p+2=(3n+1)^3+(3n+1)^2+11(3n+1)+2=3(9n^3+12n^2+16n+5)$ — sudėtinis skaičius.

Atsakymas: $p=3$.

45.1. Sąlygoje pateiktos sistemos sprendiniai gaunami iš šių dviejų sistemų:

$$\begin{cases} x=3, \\ x+6y=3 \end{cases} \text{arba} \begin{cases} x=-3, \\ x+6y=3. \end{cases}$$

Atsakymas: $(3;\ 0)$; $(-3;\ 1)$

45.2. Pirmas būdas. $999\,400\,119\,992=10^{12}-599\,880\,008=10^{12}-6\cdot10^8+119\,992=10^{12}-6\cdot10^8+10^5+2\cdot10^4-8=10^{12}-6\cdot10^8+12\cdot10^4-8=(10^4-2)^3=9998^3$.

Antras būdas. $10\,000^3=10^{12}$ — per didelis; $9990^3=9990^2\cdot9990<10^8\cdot9990=999\cdot10^9$ — per mažas. Kadangi kubas baigiasi skaitmeniu 2, tai ieškomas skaičius baigiasi skaitmeniu 8. Taigi gali tikti tik 9998. Patikrinimas tai patvirtina.

46.1. Komiso parduotuvė už abu daiktus gavo $360\cdot\frac{25}{100}=90$ (Lt) pelno. Sakykime, kad komisas vieną daiktą pirko už x Lt, o kitą — už y Lt. Sudarome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x+y=360, \\ x\cdot\frac{50}{100}+y\cdot\frac{12{,}5}{100}=90; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=120, \\ y=240. \end{cases}$$

Vienas daiktas parduotas už $120+120\cdot\frac{1}{2}=180$ (Lt), o kitas — už $240+240\cdot\frac{1}{8}=270$ (Lt).

46.2. Pirmas atvejis. Taškai M ir N yra vienoje tiesės AB pusėje (42 pav., a).

Brėžimas

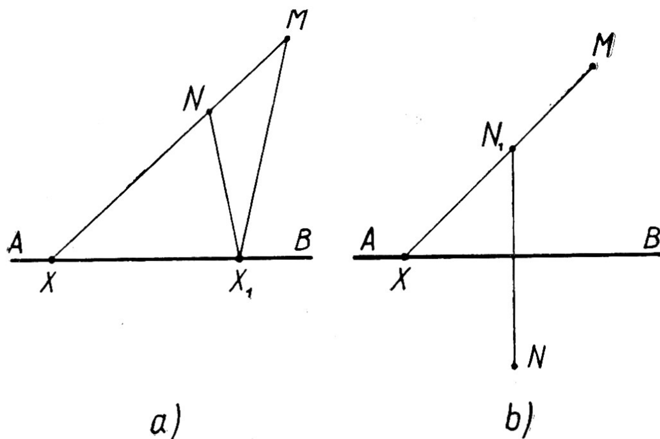
1. Brėžiame tiesę MN.
2. Pažymime tiesių MN ir AB susikirtimo tašką X.

X — ieškomas taškas.

Įrodymas. Imkime bet kurį kitą tiesės AB tašką X_1:

$$MX-NX=MN,$$
$$MX_1-NX_1<MN.$$

Taigi $MX-NX>MX_1-NX_1$.



42 pav.

Antras atvejis. Taškai M ir N yra skirtingose tiesės AB pusėse (42 pav., b).

Brėžimas

1. Randame N_1, simetrišką taškui N tiesės AB atžvilgiu.
2. Brėžiame tiesę MN_1.
3. Pažymime tiesių MN_1 ir AB susikirtimo tašką X.

X — ieškomas taškas.

Įrodymas. Kadangi atkarpos NX ir N_1X simetriškos tiesės AB atžvilgiu, tai $NX=N_1X$.

$$MX-NX=MX-N_1X=MN_1.$$

Kad ir kur būtų kitas tiesės AB taškas X_1,

$$MX_1-NX_1=MX_1-N_1X_1<MN_1.$$

Ir šiuo atveju $MX-NX>MX_1-NX_1$.

Trečias atvejis. Vienas iš taškų M ir N yra tiesėje AB. Šiuo atveju ieškomas taškas X sutampa su duotuoju tašku, priklausančiu tiesei AB.

47.1. Sakykime, pirmoje cisternoje iš pradžių buvo x t benzino, o antroje y t. Pirmoje cisternoje po $\frac{x-25}{16,5}$ dienų liko 25 t benzino. Iš antros cisternos benzinas buvo išpiltas per $\frac{y}{11,4}$ dienų. Pagal sąlygą:

$$\frac{x-25}{16,5}=\frac{y}{11,4}.$$

Jei iš pirmos cisternos kasdien būtų išpilama 10 t benzino, tai jo pakaktų $\frac{x}{10}$ dienų. Jei iš antros cisternos kasdien būtų išpilama 6 t benzino, tai jo pakaktų $\frac{y}{6}$ dienų. Pagal sąlygą:

$$\frac{x}{10}=\frac{y}{6}.$$

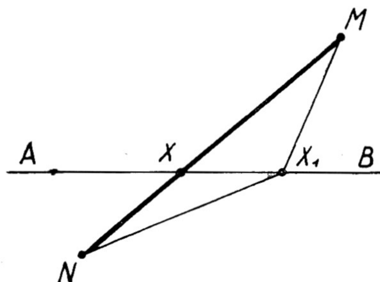
Gauname sistemą:

$$\begin{cases} \frac{x-25}{16,5}=\frac{y}{11,4}, \\ \frac{x}{10}=\frac{y}{6}; \end{cases}$$

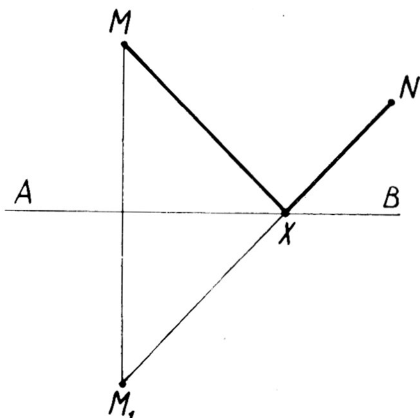
$x=190$, $y=114$.

Atsakymas: 190 t; 114 t.

47.2. Pirmas atvejis. Taškai M ir N yra skirtingose tiesės AB pusėse (43 pav.). Trumpiausias atstumas tarp dviejų taškų M ir N yra atkarpa MN. Vadinasi, tiesės AB ir atkarpos MN susikirtimo taškas X yra ieškomasis. Joks kitas tiesės AB taškas X_1 neturi šios savybės, nes $MX_1+X_1N>MN$.



43 pav.



44 pav.

Antras atvejis. Taškai M ir N yra toje pačioje tiesės AB pusėje (44 pav.). Randame taškui M simetrišką tašką M_1 tiesės AB atžvilgiu. Dabar turime pirmą uždavinio atvejį.

Trečias atvejis. Vienas iš taškų M ir N yra tiesėje AB. Šiuo atveju ieškomas taškas X sutampa su duotuoju tašku, priklausančiu tiesei AB.

48.1. Sakykime, kad pirmas skaičiaus skaitmuo yra x, antras — y, trečias — z. Remdamiesi sąlyga šį šešiaženklį skaičių parašome taip: $\overline{xyzxyz}$, arba $100\,000x+10\,000y+1000z+100x+10y+z=$ $=100\,100x+10\,010y+1001z=1001\,(100x+10y+z)$.

$100x+10y+z$ — sveikasis skaičius, o $1001=7\cdot11\cdot13$. Taigi toks šešiaženklis skaičius dalus iš 7, 11 ir 13.

48.2. Iš uždavinio sąlygos aišku, kad $0<x+y+z\leqslant27$ ir $1000=$ $=\overline{xyz}\cdot(x+y+z)$. Vadinasi, $x+y+z$ yra 1000 daliklis. Reikia pa-

tikrinti septynis skaičius: 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25. Tinka tik skaičius 8, nes tada $1000=125\cdot(1+2+5)$. Iššifruota lygybė tokia:

$$\frac{1}{1+2+5}=0{,}125,$$

t. y. $x=1$, $y=2$, $z=5$.

49.1. Šešis dviženklius skaičius (išskyrus tuos, kurie turi du vienodus skaitmenis) galima sudaryti tik iš trijų skirtingų skaitmenų. Taigi bilieto numeris — triženklis skaičius. Pažymėkime jį $\overline{xyz}=100x+10y+z$. Visų galimų dviženklių skaičių, sudarytų iš skaitmenų x, y, z, suma: $(10x+y)+(10x+z)+(10y+x)+(10y+z)+(10z+x)+(10z+y)=22(x+y+z)$.
Pagal uždavinio sąlygą, $11(x+y+z)=100x+10y+z$, arba $10z+y=89x$.
Kadangi $10z+y$ — dviženklis skaičius, tai iš paskutinės lygybės išplaukia, kad $x=1$. ($x=0$ netinka, nes tuomet $y=z=0$, t. y. skaitmenys nebūtų skirtingi.) Vadinasi, $10z+y=89$; iš čia $y=9$, $z=8$. Bilieto numeris 198.

49.2. a) Padalijus skaičių $\overline{acac}$ iš skaičiaus $\overline{ac}$, gaunamas dalmuo 101, todėl skaičius $\overline{acac}=101\cdot\overline{ac}$. Sandaugoje $101\cdot\overline{ac}$ dauginamasis 101 (pirminis skaičius) parašytas tik vieną kartą. Kadangi $\overline{ac}<101$, vadinasi, $\overline{acac}$ negali būti kvadratas.

b) Skaičius $\overline{abc\,abc}=1001\cdot\overline{abc}=7\cdot11\cdot13\cdot\overline{abc}$. Skaičius $\overline{abc\,abc}$ negali būti kvadratas, nes triženklis skaičius $\overline{abc}$ nelygus keturženklei pirminių skaičių sandaugai $7\cdot11\cdot13$.

Atsakymas: a) negali; b) negali.

50.1. $a^3+a^2+4=(a^3+8)+(a^2-4)=(a+2)(a^2-2a+4)+(a-2)\times\times(a+2)=(a+2)(a^2-a+2)$.

50.2. $\overline{xyztu}=x^5+y^4+z^3+t^2+u$.
$10^4x+10^3y+10^2z+10t+u=x^5+y^4+z^3+t^2+u$.
Kadangi x, y, z, t, u — skaitmenys, be to, $x\neq0$, tai $10^4x>x^5$, $10^3y\geqslant y^4$, $10^2z\geqslant z^3$, $10t\geqslant t^2$. Dešinioji lygties pusė visada bus mažesnė už kairiąją. Taigi lygtis neturi sprendinių.

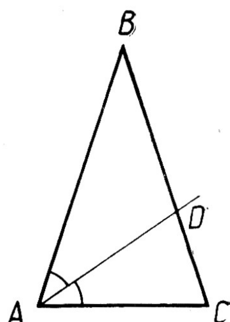
51.1. $a^5+a+1=a^5+a^4-a^4+a^3-a^3+a^2-a^2+a+1=(a^5+a^4+a^3)-(a^4+a^3+a^2)+(a^2+a+1)=a^3(a^2+a+1)-a^2(a^2+a+1)+(a^2+a+1)=(a^2+a+1)(a^3-a^2+1)$.

51.2. Pirmas būdas. Per duotą tašką A brėžiame apskritimo skersmenį ir tam skersmeniui statmeną tiesę, taip pat einančią per tašką A.
Antras būdas. Ieškoma styga yra dviejų apskritimų — duoto ir jam simetriško taško A atžvilgiu — bendroji styga.

52.1. Atkreipiame dėmesį į reiškinius $a-b$, $a+c$ ir $2a+c-b$. Matome, kad $2a+c-b=(a-b)+(a+c)$, todėl paskutinį narį $bc(2a+c-b)$ galime išreikšti dviejų dėmenų suma:

$$ab(a-b)-ac(a+c)+bc(2a+c-b)=ab(a-b)-ac(a+c)+$$
$$+bc(a-b)+bc(a+c)=(a-b)(ab+bc)+$$
$$+(a+c)(bc-ac)=b(a-b)(a+c)+$$
$$+c(a+c)(b-a)=(a-b)(a+c)(b-c).$$

52.2. $AB=BC$, $\angle ABC=36°$ (45 pav.), $\angle A=$
$=\angle C=(180°-36°):2=72°$;
$\angle BAD=72°:2=36°$, todėl trikampis ABD yra lygiašonis.
$\angle DAC=\angle BAD=36°$;
$\angle ADC=180°-\angle DAC-\angle C=180°-36°-$
$-72°=72°$.
Kadangi $\angle ADC=\angle C$, tai trikampis ADC yra lygiašonis.



45 pav.

53.1. Taikome keitinį: $x^2+4x+8=y$. Tada $y^2-3xy+2x^2=y^2-2xy-$
$-xy+2x^2=(y-2x)(y-x)=(x^2+2x+8)(x^2+3x+8)$.

53.2. Sakykime, kad x — ieškomas triženklis skaičius, tada $x=$
$=419p+75$; čia $p\in N$ ir $p<3$. Reiškinio $419p+75$ reikšmė bus triženklis skaičius, kai $p=1$ arba $p=2$.
Kai $p=1$, tai $x=419\cdot 1+75=494$.
Kai $p=2$, tai $x=419\cdot 2+75=913$.
Sąlygą atitinka tik skaičius 494. Skaičiaus 913 skaitmenų suma $9+1+3\neq 17$.

A t s a k y m a s: 494.

54.1. Sąlygoje pateiktą reiškinį galima pakeisti tokiu:

$$(n^3+3n^2+2n)+6n=n(n+1)(n+2)+6n.$$

Aišku, kad antras dėmuo ($6n$) dalijasi iš 6, o pirmas dėmuo yra trijų iš eilės einančių natūraliųjų skaičių sandauga. Ji, kaip žinome, dalijasi iš 6. Abu dėmenys dalijasi iš 6. Vadinasi, ir suma dalijasi iš 6.

54.2. Kai $n\in N$ ir $n\geqslant 3$, tai $(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+$
$+(n+2)^2=5(n^2+2)$. Kad sandauga $5(n^2+2)$ būtų natūraliojo skaičiaus kvadratas, suma n^2+2 turi dalytis iš 5, o n^2 paskutinis skaitmuo turėtų būti 3 arba 8. Bet tokių natūraliųjų skaičių nėra. Taigi įrodėme, kad penkių iš eilės einančių natūraliųjų skaičių kvadratų suma nėra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

55.1. Jei už pergalę skiriamas 1 taškas, o už lygiąsias 0,5 taško, tai dalyvis daugiausia gali surinkti 29 taškus. Jis gauna atskyrį, jei surenka ne mažiau kaip 17,5 taško (ne mažiau kaip 60% skaičiaus 29). Kadangi turnyre bus sužaista iš viso $\frac{30\cdot29}{2}=435$ partijos, tai dalyvių, galinčių gauti atskyrį, daugiausia yra $435:17{,}5$, t. y. 24. Be to, jei 24 dalyviai tarpusavyje sužaidžia lygiomis, o prieš kitus 6 dalyvius laimi, tai kiekvienas iš jų surenka po 17,5 taško ir gauna atskyrį. Vadinasi, šiame turnyre gali gauti atskyrį daugiausia 24 dalyviai.

A t s a k y m a s: 24 šachmatininkai.

55.2. Ta suma pertvarkoma taip: $(2+2^2)+(2^3+2^4)+\ldots+$ $+(2^{99}+2^{100})=2(1+2)+2^3(1+2)+\ldots+2^{99}(1+2)=3(2+2^3+$ $+\ldots+2^{99})$. Matome, kad suma dalijasi iš 3.

56.1. Sakykime, kad pirmoje lentynoje buvo x knygų, o antroje y. Pagal uždavinio sąlygą: $y>x$. Jeigu iš antros lentynos perdėtume į pirmą x knygų, tai pirmoje būtų $2x$ knygų, o antroje $y-x$ knygų. Be to, pirmoje jų būtų 3 kartus mažiau negu antroje. Sudarome lygtį:

$$6x=y-x.$$

Iš čia gauname:

$$7x=y.$$

Mažiausia x reikšmė — vienetas. Vadinasi, pirmoje lentynoje mažiausiai galėjo būti 1 knyga, antroje — 7 knygos.

56.2. $x^3+y^3+z^3-3xyz=x^3+y^3+3x^2y+3y^2x+z^3-3xyz-3x^2y-$ $-3y^2x=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z)=(x+y+z)\left((x+y)^2-\right.$ $\left.-(x+y)z+z^2\right)-3xy(x+y+z)=(x+y+z)(x^2+2xy+y^2-xz-$ $-yz+z^2-3xy)=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$.

57.1. Mokyklą reikėtų statyti gyvenvietėje, kurioje yra 100 mokinių. Jei ji stovėtų kitoje vietoje, tai 50 pirmos gyvenvietės mokinių ir 50 antros gyvenvietės mokinių nepriklausomai nuo mokyklos vietos kartu nueitų kelią, ne mažesnį už $50a$; čia a — kelio ilgis tarp gyvenviečių. Dar 50 antros gyvenvietės mokinių tuo atveju kelias į mokyklą būtų ilgesnis už tą, kurį jiems reikėtų nueiti iki mokyklos, jei ji stovėtų pačioje gyvenvietėje.

A t s a k y m a s: gyvenvietėje, kurioje yra 100 mokinių.

57.2. Pertvarkome kairiąją įrodomos lygybės pusę: $(s-a_1)^2+(s-a_2)^2+\ldots+(s-a_n)^2=s^2-2sa_1+a_1^2+s^2-2sa_2+$ $+a_2^2+\ldots+s^2-2sa_n+a_n^2=s^2n-2s(a_1+a_2+\ldots+a_n)+$

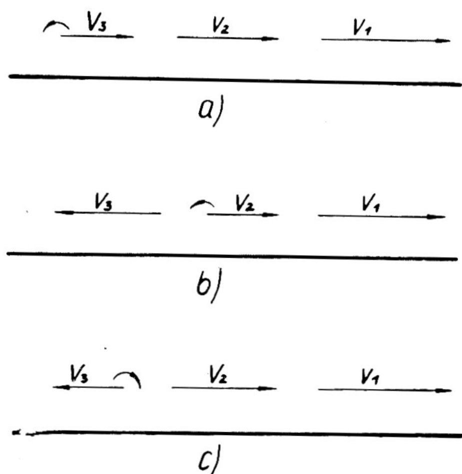
$+a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$. Kadangi $a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{n}{2}s$, tai $(s-a_1)^2+(s-a_2)^2+\ldots+(s-a_n)^2=s^2n-2s\cdot\frac{n}{2}s+a_1^2+a_2^2+$ $+\ldots+a_n^2=s^2n-s^2n+a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$.

58.1. Sakykime, kad visi automobiliai važiuoja ta pačia kryptimi, o jų greitis v_1, v_2, v_3. Du automobiliai tols vienas nuo kito, kai $v_3<v_2<v_1$ ir priekyje važiuos automobilis, kurio greitis v_1, paskutinis — trečias automobilis, kurio greitis v_3 (46 pav., *a*). Šiuo atveju, trečiam automobiliui apsisukus, vis vien kiekvieni du automobiliai tols vienas nuo kito.

Jeigu du automobiliai važiuoja viena kryptimi (pirmas greičiu v_1, po jo antras greičiu v_2), o trečias juda priešinga kryptimi greičiu v_3, tai galimi du atvejai.

Kai $v_2<v_1$ ir $v_2<v_3$, gali apsisukti antras automobilis (46 pav., *b*).

Kai $v_3<v_2<v_1$, gali apsisukti trečias automobilis (46 pav., *c*).



46 pav.

58.2. Tik skaičiaus, kuris baigiasi 7, kubo paskutinis skaitmuo yra 3. Vadinasi, triženklis skaičius baigiasi 7. Pakėlę kubu skaičius 100, 200, ..., 900, įsitikiname, kad tik skaičių 500, ..., 900 kubai yra devyniaženkliai, o $500^3=125\,000\,000$.

Pirmiausia tikriname natūraliuosius skaičius, kurie arčiausiai 500 ir baigiasi 7. Randame $507^3=130\,323\,843$, $497^3=122\,763\,473$. Kadangi $487^3<490^3=117\,649\,000$, tai uždavinio sąlygą atitinka tik $497^3=122\,763\,473$.

59.1. Žemo vyro žingsnis sudaro $\frac{80\%}{100\%}=\frac{4}{5}$ aukštojo žingsnio, o jo žingsnių skaičius — $\frac{120\%}{100\%}=\frac{6}{5}$ aukšto vyro žingsnių skaičiaus. Vadinasi, žemo vyro greitis sudaro $\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}=\frac{24}{25}$ aukštojo greičio. Taigi aukštas vyras į įmonę ateis anksčiau už žemąjį.

59.2. Pirmas būdas. Remsimės iš sąlygos gauta lygybe $x+y=-(z+t)$. Tuomet $x^3+y^3+z^3+t^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)+(z+t)(z^2-zt+t^2)=(x+y)((x+y)^2-3xy)+(z+t)((z+t)^2-3zt)=-(z+t)((z+t)^2-3xy)+(z+t)((z+t)^2-3zt)=(z+t)(-(z+t)^2+3xy+(z+t)^2-3zt)=3(z+t)(xy-zt)$.

Antras būdas. Įrodomąją lygybę galima gauti tiesiogiai iš teisingos lygybės $x+y=-(z+t)$ abi jos puses pakėlus kubu: $(x+y)^3=-(z+t)^3$. Iš čia $x^3+y^3+3xy(x+y)=-z^3-t^3-3zt(z+t)$. Arba: $x^3+y^3+z^3+t^3=3xy(z+t)-3zt(z+t)=3(z+t)(xy-zt)$.

60.1. Pažymėkime keturženklį skaičių $\overline{abcd}$, $a\neq 0$. Nubraukime jo vienetų skaitmenį d. Remdamiesi sąlyga gautume lygybę:

$\overline{abcd}=10\cdot\overline{abc}=\overline{abc0}$, o iš čia $d=0$.

Jei išbrauktume c, gautume $\overline{abcd}=\overline{abd0}$, *arba* $c=d=0$.

Jei išbrauktume b, gautume $\overline{abcd}=\overline{acd0}$, arba $b=c=d=0$.

Jei nubrauktume a, gautume $\overline{abcd}=\overline{bcd0}$, o iš čia $a=b=c=d=0$ (prieštara, nes $a\neq 0$).

Vadinasi, keturženklio skaičiaus gale gali būti vienas, du arba trys nuliai ir nubrauktas vienas iš jų.

60.2. Matome, kad daugiklio vienetų skaitmuo turi būti 8. Kadangi pirma dalinė sandauga mažesnė už antrą dalinę, tai daugiklio dešimčių skaitmuo yra 9. Pažymėję dauginį raide x, gauname nelygybes

$$8x\leqslant 9994, \qquad 9x\geqslant 10\,000.$$

Vadinasi, $1112\leqslant x\leqslant 1249$. Kadangi x baigiasi 3, tai $x=1113$; 1123; ...; 1243. Gauname 14 kintamojo x reikšmių.

Atsakymas: 14.

61.1. Sakykime, kad nubrauktas skaičiaus x skaitmuo ir gautas skaičius y. Įrodysime, kad nubrauktas pirmas skaitmuo. Jei būtų nubrauktas ne pirmas skaitmuo, tai skaičiai x ir $10y$ turėtų vienodą skaitmenų skaičių, be to, pirmieji jų skaitmenys būtų vienodi. Savaime aišku, kad skaičius $71y$ būtų didesnis už skaičių x, o tai prieštarautų sąlygai. Vadinasi, nubrauktas pirmas skaitmuo.

Pažymėkime nubrauktą skaitmenį raide a. Iš sąlygos žinome, kad

$$a\cdot 10^n+y=71y,\ n\in\boldsymbol{N}.$$

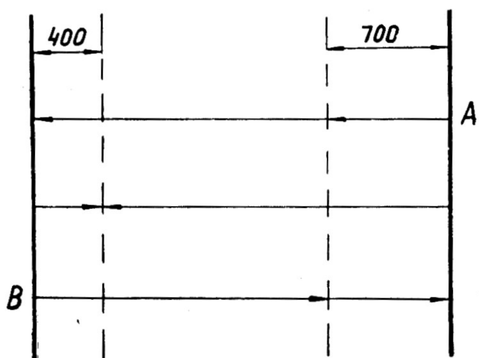
Todėl

$$a\cdot 10^n=70y;$$

iš čia $a=7$ ir $10^n=10y$. Vadinasi, lieka $y=10^{n-1}$, o nubrauktas 7 — pirmas skaičiaus $710\ldots0$ skaitmuo.

61.2. Stačiakampio kraštines pažymime x ir y. Gauname: $2(x+y)=xy$. Iš čia:
$xy=2x+2y$, $xy-2x-2y+4=4$, $(x-2)(y-2)=4$.
Tikriname dauginamojo $x-2$ sveikąsias reikšmes tokias: -4; -2; -1; 1; 2 ir 4. Tada dauginamojo $y-2$ atitinkamos sveikosios reikšmės yra -1; -2; -4; 4; 2 ir 1.
Sąlygą tenkina $x=3$, 4, 6, tuomet atitinkamai $y=6$, 4, 3. Gavome du stačiakampius, kurių kraštinių ilgiai 3 ir 6 arba 4 ir 4.

62.1. Sakykime, kad keltas A susitinka su keltu B nuplaukęs 700 m nuo kranto (47 pav.). Tuo momentu jų nuplauktas atstumas lygus upės pločiui. Keltas A, pasiekęs kitą krantą, pakeičia kryptį priešinga ir, nuplaukęs 400 m, vėl sutinka keltą B. Tuo momentu jų nuplauktas atstumas lygus trigubam upės pločiui. Kadangi jų greitis pastovus, tai keltas A nuplaukė atstumą, lygų $3\cdot 700=2100$ (m). Upės plotis 400 m mažesnis už kelto A nuplauktą atstumą, t. y. lygus 1700 m.



47 pav.

62.2. Kadangi $182=2\cdot 7\cdot 13$, tai skaičius $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 15$ dalijasi be liekanos iš 182, o padalijus skaičių 200 iš 182, gaunama liekana 18. Ji ir yra ieškoma liekana. Dalmuo lygus $1\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\times$ $\times 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 14\cdot 15+1$.

63.1. Sakykime, kad valstietė atsinešė į turgų x kiaušinių. Kai pirmam pirkėjui pardavė $\frac{1}{2}x-6$ kiaušinius, jai liko $\frac{1}{2}x+6$ kiaušiniai. Antram pirkėjui valstietė pardavė $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x+6\right)-6$ kiaušinius, tada jai liko dar $\frac{1}{2}x+6-\frac{1}{6}x-2+6=\frac{1}{3}x+10$ kiaušinių. Trečiam pardavė $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x+10\right)-6$ kiaušinius. Visiems trims ji pardavė pusę atsineštų kiaušinių. Vadinasi,

$$\frac{1}{2}x-6+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x+6\right)-6+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x+10\right)-6=\frac{1}{2}x.$$

Iš čia $x=54$.

Pirmam pirkėjui pardavė $54\cdot\frac{1}{2}-6=21$ kiaušinį, antram — $33\cdot\frac{1}{3}-6=5$ kiaušinius, o trečiam — $28\cdot\frac{1}{4}-6=1$ kiaušinį.

63.2. Pažymėkime ieškomą skaičių $\overline{penki}$ raide a, tada skaičius $a^2-a=a(a-1)$ baigiasi penkiais nuliais ir dalijasi iš $100\,000=5^5\cdot 2^5$. Kadangi skaičiai a ir $a-1$ neturi bendrų daliklių, tai vienas jų dalus iš $5^5=3125$, o kitas — iš $2^5=32$.

Pirmiausia išnagrinėkime atvejį, kai a dalijasi iš 3125, o $a-1$ — iš 32. Iš sąlygos aišku, kad $e=0$. Kadangi ir skaičius $\overline{p0nki}$, ir skaičius $\overline{p0000}$ dalijasi iš 625, tai jų skirtumas $\overline{nki}$ irgi dalijasi iš 625. Vadinasi, $\overline{nki}=625$. Bet skaičių $\overline{p0625}=10\,000p+625$ padalijus iš 625, gaunamas dalmuo $16p+1$. Kad šis dalmuo dalytųsi iš 5, būtina, jog skaitmuo p būtų 4 arba 9. Kai $p=4$, gauname skaičių 40 625, kuris neatitinka uždavinio sąlygos, nes 40 624 nesidalija iš 32.

Kai $p=9$, gauname skaičių 90 625, kuris yra uždavinio sprendinys.

Analogiškai nagrinėjame antrą atvejį. Naujų sprendinių negauname.

64.1. Išnagrinėkime šachmatų lentos dalį (3×3) (žr. 1 lentelę).

1 lentelė

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

Iš lygybių $(a_4+a_5+a_6)+a_3=(a_4+a_5+a_6)+a_9=a_1+(a_4+a_5+a_6)=a_7+(a_4+a_5+a_6)$ išplaukia, kad $a_1=a_3=a_7=a_9$. Iš lygybės $a_7+a_4+a_1+a_2=a_9+a_6+a_3+a_2$ išplaukia, kad $a_4=a_6$.

Iš lygybės $a_1+a_2+a_3+a_6=a_7+a_8+a_9+a_6$ išplaukia, kad $a_2=a_8$. Iš lygybės $a_2+a_5+a_8+a_7=a_4+a_5+a_6+a_3$ išplaukia, kad $a_2+a_8=a_4+a_6$. Vadinasi, $a_2=a_4=a_6=a_8$.

Iš lygybės $a_7+a_4+a_1+a_2=a_8+a_5+a_2+a_3$ išplaukia, kad $a_1=a_5$. Taigi kiekvienoje tokioje šachmatų lentos dalyje yra daugiausia du skirtingi skaičiai (žr. 2 lentelę).

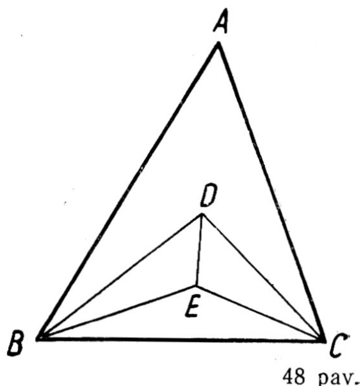
2 lentelė

a	b	a
b	a	b
a	b	a

Norėdami užpildyti visą lentą, rašytume skaičius a ir b į viršų ir į apačią, po to į dešinę ir į kairę. Gautume vienodai užpildytą kas antrą eilutę ir kas antrą stulpelį. Vienas tų skaičių užpildytų juoduosius laukelius, kitas — baltuosius. Suprantama, gali būti visi skaičiai lygūs, tuomet $a=b$. Vadinasi, šachmatų lentoje yra ne daugiau kaip du skirtingi skaičiai.

A t s a k y m a s: vienas arba du.

64.2. Kadangi E — trikampio BCD dviejų pusiaukampinių susikirtimo taškas, tai atkarpa DE — trečiosios to trikampio pusiaukampinės dalis (48 pav.). Vadinasi, $\angle BDE = \angle EDC$.



48 pav.

65.1. Natūraliųjų skaičių kvadratai baigiasi tik skaitmenimis 0, 1, 4, 5, 6, 9. Jei skaičiaus kvadratas baigiasi nuliu, tai prieš jį taip pat yra skaitmuo 0. Jei kvadratas baigiasi lyginiu skaitmeniu, tai to kvadrato du paskutiniai skaitmenys sudaro skaičių, dalų iš 4 (kiekvieno lyginio skaičiaus kvadratas dalijasi iš 4). Peržiūrėsime duoto skaičiaus skaitmenis iš dešinės į kairę, laikydami, kad jais baigiasi ieškomi skaičiai (išskyrus 2, 8 ir 3, kuriais natūraliųjų skaičių kvadratai baigtis negali).

Jei, nubraukus kelis skaitmenis, skaičius baigiasi skaitmeniu 6, tai prieš jį turi būti skaitmuo 3 arba 1. Taip gauname du kvadratus — 36 ir 16.

Nėra natūraliojo skaičiaus kvadrato, kuris baigtųsi tik vienu nuliu.

4 yra natūraliojo skaičiaus kvadratas. Ieškodami daugiau sprendinių, kurie baigiasi 4, priešpaskutiniu skaitmeniu bandome 8, 2 arba 4. Randame skaičių 484.

Išbraukę skaitmenis, galime gauti dar vieną kvadratą — skaičių 1.

Vadinasi, braukydami pateikto skaičiaus skaitmenis, galime gauti tokius skaičių kvadratus: 1, 4 (dviem būdais), 16, 36, 484.

65.2. Iš $\triangle BMC$:

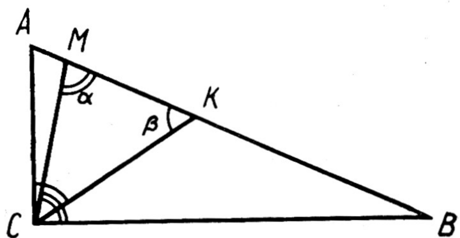
$$\alpha = \frac{180° - \angle B}{2} \quad (49 \text{ pav.})$$

Iš $\triangle AKC$:

$$\beta = \frac{180° - \angle A}{2}.$$

$$\alpha + \beta = \frac{180° - \angle B}{2} + \frac{180° - \angle A}{2} = \frac{360° - (\angle A + \angle B)}{2} = \frac{360° - 90°}{2} = 135°.$$

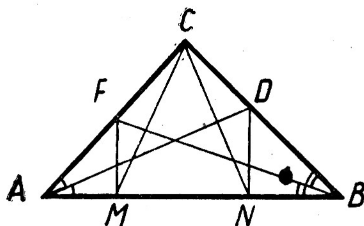
$$\angle MCK = 180° - 135° = 45°.$$



49 pav.

66.1. Pastebime, kad kairiojoje lygybės pusėje esanti sandauga turi $2n-1$ skaitmenį, o dešiniojoje pusėje esantis skaičius, kai $n \geqslant 10$, turės daugiau negu $2n-1$ skaitmenį. Vadinasi, kai $n \geqslant 10$, ši lygybė neteisinga. Patikrinę įsitikiname, kad lygybė teisinga, kai $1 \leqslant n \leqslant 9$.

66.2. Remdamiesi pusiaukampinės savybe, rašome: $FC=FM$ ir $DC=DN$ (50 pav.). Įrodome, kad $BM=BC$ ir $AN=NC$. Tarę, kad $\angle CMN=\alpha$ ir $\angle CNM=\beta$, sprendžiame taip, kaip VII—VIII klasės 65.2 uždavinį.



50 pav.

67.1. Kairiojoje lygybės pusėje skaičius vienas, kaip dėmuo, parašytas n kartų, skaičius du — $(n-1)$ kartą, skaičius trys — $(n-2)$ kartus, ..., skaičius n — vieną kartą. Taip yra ir dešiniojoje lygybės pusėje, kur vienodų dėmenų suma pakeista sandauga. Todėl sąlygoje pateikta lygybė yra teisinga.

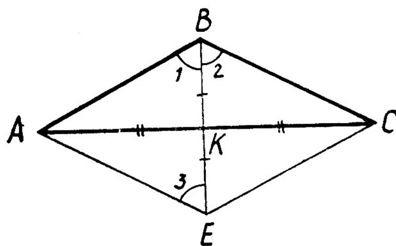
67.2. Duota: $\triangle ABC$, $AK=KC$, $\angle 1=\angle 2$.

Reikia įrodyti: $AB=BC$.

Įrodymas.

Pratęsiame atkarpą BK ir atidedame $KE=BK$, sujungiame E su A ir C (51 pav.).

Kadangi $AK=KC$, $KE=BK$ ir $\angle AKE=\angle BKC$, tai $\triangle AKE=\triangle BKC$. Vadinasi, $AE=BC$ ir $\angle 2=\angle 3$. Iš to, kad $\angle 1=\angle 2$ ir $\angle 2=\angle 3$ išplaukia, jog $\angle 1=\angle 3$. Taigi $\triangle ABE$ — lygiašonis.



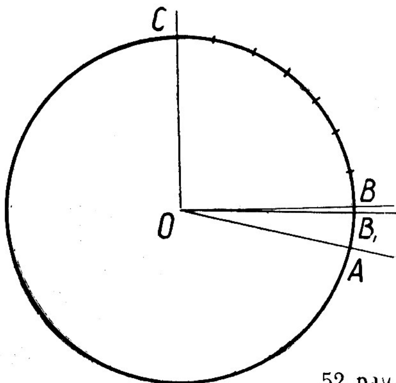
51 pav.

Iš to, kad $AB=AE$ ir $AE=BC$ išplaukia, jog $AB=BC$.

68.1. Skaičius, kurį sudaro šeši vienodi skaitmenys, visada dalijasi iš 1001, taigi ir iš 13, nes $1001=7\cdot 11\cdot 13$. Bet $1992=6\cdot 332$, todėl sąlygoje nurodytas skaičius $88\ldots 8$ dalijasi iš 888 888, taigi ir iš 13.

68.2. Nubrėžkime bet kokio spindulio apskritimą, kurio centras duoto kampo viršūnė O (52 pav.). Apskritimas kerta kampo kraštines taškuose A ir B. Braižome statųjį kampą BOC, neturintį spindulio OA. Lanke CBA atidedame lanką CB_1, kurio laipsninis matas lygus $13°\cdot 7$, t. y. $91°$. Tada kampo BOB_1 laipsninis matas lygus $1°$.

Tolesnis brėžimas aiškus.



52 pav.

69.1. Sakykime, kad $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$ — tie skaitmenys. Tada $\overline{abcd}$ didžiausias, o $\overline{dcba}$ — mažiausias skaičius. Parašome stulpeliu

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{array} \\ \hline 1\ 1\ 2\ 2\ 0 \end{array}$$

Iš čia $d+a=10$ ir $c+b=11$. Todėl $a+b+c+d=21$.

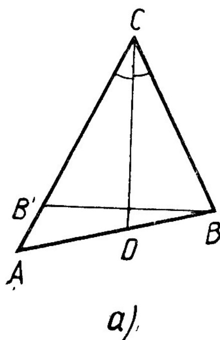
A t s a k y m a s: 21.

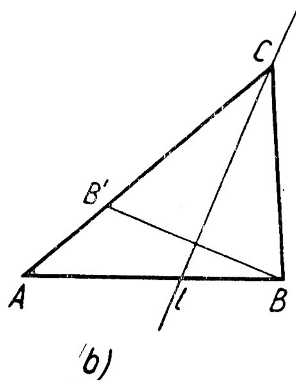
69.2. P i r m a s a t v e j i s. Atkarpos AB ir tiesės l susikirtimo taškas yra tarp taškų A ir B.

A n a l i z ė. Sakykime, kad trikampis ABC nubraižytas ir CD jo pusiaukampinė (53 pav., *a*). Kadangi kampo pusiaukampinė yra jo simetrijos ašis, tai taškui B simetriškas taškas B' tiesės CD atžvilgiu turi priklausyti tiesei AC.

B r ė ž i m a s

1. Randame tašką B', simetrišką taškui B tiesės l atžvilgiu (53 pav., *b*).





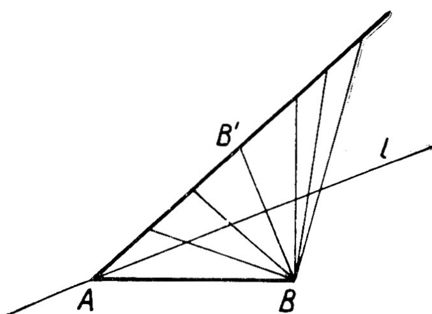
53 pav.

2. Brėžiame tiesę AB'; tiesės AB' ir l susikerta taške C. Taškas C — trečioji ieškomo trikampio ABC viršūnė.

Į r o d y m a s. Reikia įrodyti, kad tiesė l yra kampo ACB pusiaukampinė. Taškai B ir B' simetriški tiesės l atžvilgiu (taip brėžėme), o taškas C yra simetriškas jam pačiam šios tiesės atžvilgiu. Tada spinduliai CB ir CB' simetriški tiesės l atžvilgiu. Taigi tiesė l — kampo ACB simetrijos ašis, vadinasi, joje yra kampo pusiaukampinė.

T y r i m a s. Jei tiesė l nestatmena atkarpai AB, o susikirtimo taškas nėra atkarpos AB vidurys, tai uždavinys turi vienintelį sprendinį. Jei tiesė l yra statmena atkarpai AB ir eina per jos vidurį, tai uždavinys turi be galo daug sprendinių: kiekvienas tiesės l taškas (išskyrus jo susikirtimo su atkarpa AB tašką) gali būti trikampio viršūnė C. Jei tiesė l statmena atkarpai AB, bet

nėra jos vidurio statmuo, tai uždavinys neturi sprendinių. Jis neturi sprendinių ir tada, kai tiesė l eina per atkarpos AB vidurį, bet nėra jai statmena (tada tiesė AB' lygiagreti tiesei l).



54 pav.

Antras atvejis. Tiesės l ir atkarpos AB susikirtimo taškas sutampa su vienu atkarpos galu (54 pav.). Sakykime, kad tiesė l eina per atkarpos AB tašką A. Randame tašką B', simetrišką taškui B tiesės l atžvilgiu. Trečiąja trikampio viršūne C gali būti kiekvienas spindulio AB' taškas, išskyrus tašką A. Uždavinys turi be galo daug sprendinių.

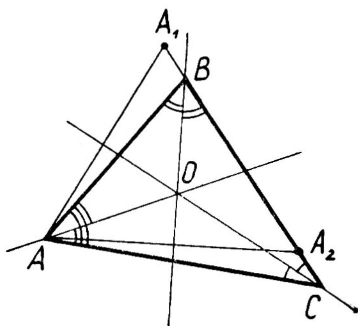
Kai tiesė l statmena atkarpai AB, uždavinys neturi sprendinių.

70.1. Kadangi $2^9+2^8+2^7+\ldots+2^2+2^1+2^0=1023$, tai triženklio skaičiaus išraiška skaičiaus 2 nevienodų laipsnių suma negali turėti daugiau kaip 9 dėmenis.

Triženklį skaičių išreikšti 9 dėmenų suma galima išbraukiant bet kurį skaičiaus 1023 išraiškos dėmenį, didesnį už 23, t. y. iš skaičiaus 1023 atimant 32, 64, 128, 256, 512.

Vadinasi, uždavinio sąlygą atitinka skaičiai 991, 959, 895, 767, 511.

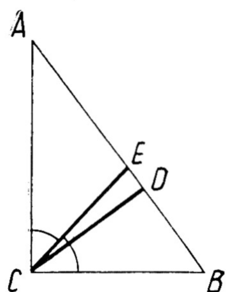
70.2. Remsimės tuo, kad kampo pusiaukampinė yra jo simetrijos ašis. Randame taškui A simetriškus taškus A_1 ir A_2 tiesių, kurios neina per tašką A, atžvilgiu (55 pav.). Abu taškai yra prieš viršūnę A esančioje trikampio kraštinėje (arba jos tęsinyje). Brėžiame tiesę A_1A_2. Ji kerta dvi pusiaukampines, neinančias per A. Tie taškai — braižomo trikampio viršūnės B ir C.



55 pav.

71.1. Sakykime, kad $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=k$. Tada $a=b\cdot k$, $b=c\cdot k$, $c=a\cdot k$ ir $abc=abc\cdot k^3$. Iš čia: $k^3=1$, t. y. $k=1$. Vadinasi, $a=b=c$.

71.2. Uždavinys sprendžiamas nubraižant statųjį trikampį CED pagal duotą statinį CD ir įžambinę CE (56 pav.). Po to braižomi kampai ACE ir ECB, kurių kiekvieno laipsninis matas lygus 45°. Trikampis ACB yra ieškomasis.



56 pav.

72.1. Sakykime, kad $\frac{1}{117}=a$ ir $\frac{1}{119}=b$, tada

$$3\frac{1}{117}\cdot 4\frac{1}{119}-1\frac{116}{117}\cdot 5\frac{118}{119}-\frac{5}{119}=(3+a)(4+b)-$$
$$-(2-a)(6-b)-5b=10a=\frac{10}{117}.$$

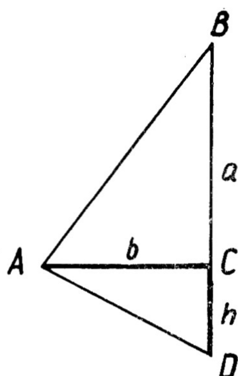
72.2. Duota: b — statinis, $c-a=h$ — įžambinės ir kito statinio skirtumas.

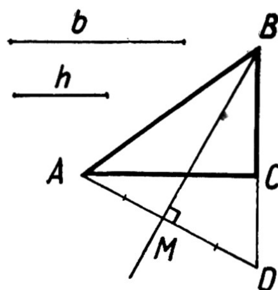
Reikia nubraižyti: $\triangle ABC$, kurio $AC=b$, $AB-BC=h$, $\angle ACB=$ $=90°$.

A n a l i z ė. Sakykime, kad $\triangle ABC$ — ieškomasis (57 pav., a). Tiesėje BC atidėkime $BD=c$. Gausime $BD=AB$, tada $CD=h$. $\triangle ACD$ galima nubraižyti, nes jis statusis ir žinomi jo statiniai $AC=b$, $CD=h$. Ieškomo trikampio viršūnė B yra atkarpos AD vidurio statmens ir tiesės CD susikirtimo taškas.

B r ė ž i m a s

1. Braižome statųjį trikampį ACD pagal du statinius (57 pav., b).





57 pav.

2. Brėžiame atkarpos AD vidurio statmenį iki susikirtimo su atkarpos CD tęsiniu taške B.

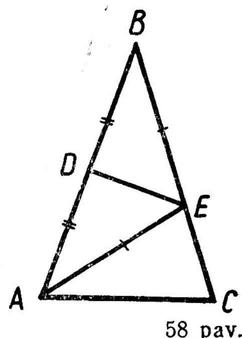
3. Sujungiame taškus A ir B ir gauname ieškomą $\triangle ABC$.

T y r i m a s. Kadangi vienos trikampio kraštinės ilgis turi būti didesnis už kitų to trikampio kraštinių ilgių skirtumą, tai uždavinys turės sprendinį tik tada, kai $b>c-a$.

73.1. Iš sąlygos: $c=-a-b$.
Tada $a^3+b^3+c^3=a^3+b^3-(a+b)^3=-3a^2b-$
$-3ab^2=-3ab(a+b)=3abc$.

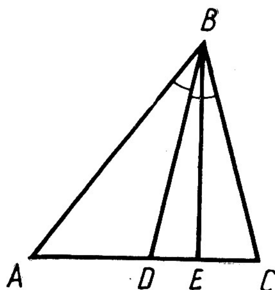
73.2. $AB=BC=\frac{P_{ABC}-AC}{2}=\frac{40-10}{2}=15$ (cm) (58 pav.).
Remiantis atkarpos vidurio statmens savybe, $AE=BE$. Todėl $P_{AEC}=BE+EC+CA=$ $=15+10=25$ (cm).

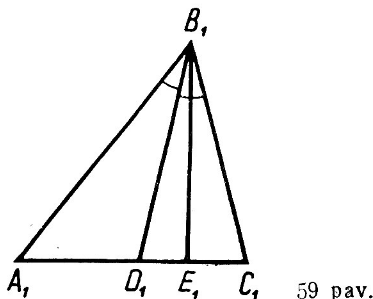
Atsakymas: 25 cm.



58 pav.

74.1. $\triangle BED=\triangle B_1E_1D_1$, nes jie statieji ir $BD=B_1D_1$, $BE=B_1E_1$ (59 pav.). Iš čia išplaukia, kad $\angle BDC=\angle B_1D_1C_1$. Dabar matyti, kad $\triangle BDC=\triangle B_1D_1C_1$, nes turi lygias kraštines BD ir B_1D_1 ir po du prie jų esančius lygius kampus. Vadinasi, $BC=B_1C_1$; $\angle ACB=\angle A_1C_1B_1$, todėl $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.





59 pav.

74.2. Padauginę dviženklį daliklį iš pirmo ir paskutinio dalmens skaitmens, gavome dviženklį skaičių, o padauginę jį iš 2 — triženklį skaičių; todėl pirmas ir paskutinis dalmens skaitmuo gali būti tik 1.

Antras ir ketvirtas dalmens skaitmuo yra 0, nes atitinkamuose dalybos etapuose nukelta po du skaitmenis. Vadinasi, dalmuo lygus 10 201.

Pirmoje dalinėje atimtyje iš triženklio skaičiaus atėmus dviženklį, gaunamas skirtumas yra vienaženklis skaičius. Tai daliklio ir 2 sandaugos pirmas skaitmuo. Todėl lygus 1. Iš čia išplaukia, kad pirmos dalinės atimties turinys lygus 100, o atėminys — 99. Bet atėminys lygus dalikliui, nes pirmas dalmens skaitmuo yra 1, vadinasi, daliklis lygus 99, o dalinys $99\cdot 10\,201=1\,009\,899$.

75.1. Remsimės akivaizdžia nelygybe:

$(a+b-c)^2 \geqslant 0,$

$a^2+b^2+c^2+2(ab-ac-bc) \geqslant 0,$

$bc+ac-ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2),$

$bc+ac-ab \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3},$

$bc+ac-ab < 1.$

Kadangi $abc > 0$, tai

$\frac{bc+ac-ab}{abc} < \frac{1}{abc},$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c} < \frac{1}{abc}.$

75.2. Atsakymas:

$$\begin{array}{r} 74265 \\ +\,74265 \\ \hline 148530 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 75234 \\ +\,75234 \\ \hline 150468 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 75346 \\ +\,75346 \\ \hline 150692 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 75469 \\ +\,75469 \\ \hline 150938 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 87265 \\ +\,87265 \\ \hline 174530 \end{array}$$

76.1. Kadangi $5ab=3b^2-10a^2$, tai

$\frac{2a-b}{3a-b}+\frac{5b-a}{3a+b}=\frac{3a^2+15ab-6b^2}{9a^2-b^2}=\frac{3a^2+3(3b^2-10a^2)-6b^2}{9a^2-b^2}=\frac{-3(9a^2-b^2)}{9a^2-b^2}=$

$=-3$. (Iš sąlygos $9a^2-b^2 \neq 0$.)

76.2. Pažymėję daliklį raide d, gauname $8d<1000$, arba $d<125$. Kadangi $7d<900$, iš pirmos dalinės atimties aišku, kad pirmasis dalmens skaitmuo yra 8. Vadinasi, dalmuo lygus 80 809. Kadangi $80\,809d > 10^7$, tai $d>123$. Taigi $d=124$. Gauname:

$$\begin{array}{r|l} 10020316 & 124 \\ \cline{2-2} -\,992 & 80809 \\ \cline{1-1} 1003 & \\ -\,992 & \\ \cline{1-1} 1116 & \\ -\,1116 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

77.1. Skaičių 71 pažymėkime raide a. Tada $(a-1)(a^9+a^8+a^7+$ $+\ldots+a^2+a+1)+1=(a^{10}+a^9+a^8+\ldots+a^3+a^2+a)-(a^9+a^8+$ $+a^7+\ldots+a^2+a+1)+1=a^{10}$.

Taigi reiškinys lygus 71^{10}.

77.2. Pirmiausia ieškome triženklio ir vienaženklio skaičių, kurių sandauga yra keturženklis skaičius, o tie skaičiai parašyti tik skaitmenimis 2, 3, 5, 7.

Kaip perrankos būdu galima rasti tokio triženklio skaičiaus ir 3 sandaugą, parodyta šioje schemoje.

```
7̸                 ⑦
5̸                 5̸ ⑦
3̸                 3̸ 5̸
2̸ ②               2̸ 3̸
* * 5             * * 5
×   3             ×   3
-------          ---------
  7 5            2 3 2 5
```

Jeigu antru triženklio skaičiaus skaitmeniu laikome 2, tai nerandame tinkamo pirmo skaitmens. Jeigu antras triženklio skaičiaus skaitmuo 7 (3 ir 5 netinka), tai pirmas skaitmuo yra tik 7.

Panašiai randame triženklio skaičiaus ir 5, triženklio skaičiaus ir 7 (2 netinka) sandaugas.

Iš viso yra keturios tokių skaičių sandaugos: $775 \cdot 3 = 2325$; $555 \cdot 5 = 2775$; $755 \cdot 5 = 3775$; $325 \cdot 7 = 2275$.

Kadangi šių keturių sandaugų nė vienas triženklis skaičius nesikartoja, tai ieškomą dviženklį skaičių sudaro vienodi skaitmenys.

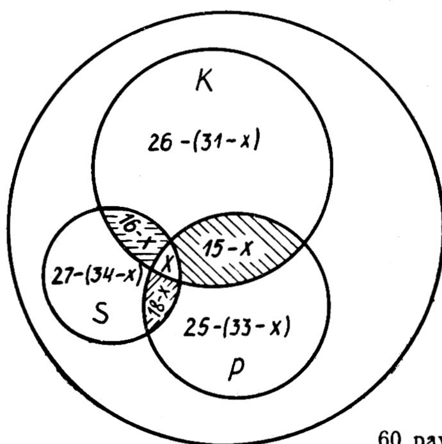
Reikia tik patikrinti, iš kurių skaitmenų sudarytos sumos:

```
  2 3 2 5       2 7 7 5       3 7 7 5       2 2 7 5
+ 2 3 2 5     + 2 7 7 5     + 3 7 7 5     + 2 2 7 5
---------     ---------     ---------     ---------
```

Sąlygą tenkina tik pirmoji suma.

Gauname vienintelį sprendinį 775 33=25 575.

78.1. Pavaizduokime Eulerio skrituliais: S — slidininkų aibę, K — krepšininkų aibę, P — plaukikų aibę (60 pav.). Iš uždavinio sąlygos aišku, kad visos trys aibės susikerta. Visų trijų aibių bendros dalies elementų skaičių pažymėkime x. Tik krepšinio treniruotes lanko $26-(31-x)$ mokinių; tik slidinėjimo — $27-(34-x)$ mokinių; tik plaukimo $25-(33-x)$ mokinių. Dviejų sporto šakų — slidinėjimo ir krepši-



60 pav.

nio — treniruotes lanko $16-x$ mokinių; krepšinio ir plaukimo — $15-x$ mokinių; slidinėjimo ir plaukimo — $18-x$ mokinių (šios aibės brėžinyje subrūkšniuotos).

Sudarome lygtį:

$25+27-(34-x)+16-x+26-(31-x)+1=40.$

Iš čia: $x=10$.

Vadinasi, tik krepšinį žaidžia 5 mokiniai, tik plaukia 2, tik slidinėja 3 mokiniai.

78.2. Pertvarkome trupmenos skaitiklį:

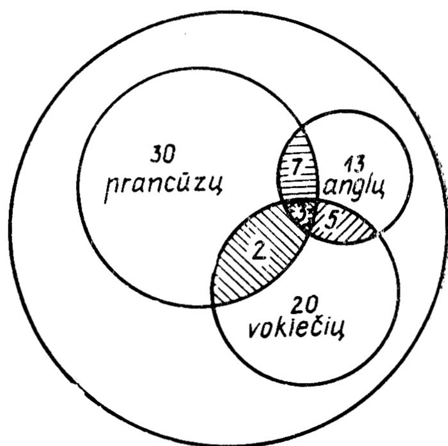
$(x^4+x^2-x)-(2x^3+2x-2)+3=3.$

Pertvarkome jos vardiklį:

$(x^5+x^3-x^2)-(x^3+x-1)+1=1.$

Atsakymas: 3.

79.1. Pavaizduokime Eulerio skrituliais (61 pav.). Užsienio kalbų mokosi iš viso $30+13+20+2+3+5+7=$ $=80$ studentų. Nesimoko užsienio kalbų $100-80=20$ studentų. Tik anglų kalbos mokosi 13 studentų, tik vokiečių — 20, tik prancūzų — 30.



61 pav.

79.2. $x^4-5x^3-4x^2-7x+4=0,$

$x^4-4x^2+4=5x^3+7x,$

$(x^2-2)^2=5x^3+7x.$

Kadangi su kiekvienu neigiamuoju skaičiumi x kairioji lygties pusė neneigiama, o dešinioji — neigiama, tai ir duota lygtis negali turėti neigiamųjų šaknų.

80.1. Pasirinkto triženklio skaičiaus skaitmenis pažymėkime raidėmis a, b, c. Sakykime, kad pirmas skaitmuo didesnis už paskutinį. Parašykime triženklių skaičių skirtumą stulpeliu:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{ccc} a & b & c \\ c & b & a \end{array} \\ \hline (a-c-1)\,9\,(10+c-a) \end{array}$$

Prie skirtumo pridėkime apgręžtą skaičių:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{ccc} (a-c-1) & 9 & (10+c-a) \\ (10+c-a) & 9 & (a-c-1) \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} 10 & 8 & 9 \end{array} \end{array}$$

Matome, kad suma 1089 nepriklauso nuo pasirinkto skaičiaus.

80.2. $\sqrt{y}=\sqrt{1960}-\sqrt{x}$,

$$y=1960+x-2\sqrt{1960x},$$
$$y=1960+x-2\cdot 14\cdot \sqrt{10x},$$
$$2^2\cdot 14^2\cdot 10x=(1960+x-y)^2.$$

Iš šios lygybės matome, kad $10x$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas. Vadinasi, $x=10k^2$, k — tam tikras sveikasis neneigiamas skaičius. Analogiškai $y=10l^2$, l — sveikasis neneigiamas skaičius. Šias x ir y išraiškas įrašome į duotąją lygtį:

$$k\sqrt{10}+l\sqrt{10}=14\sqrt{10}.\text{ Iš čia}$$
$$k+l=14.$$

k gali įgyti reikšmes 0, 1, 2, 3, ..., 14, tuomet l atitinkamai 14, 13, 12, ..., 0. Gauname 15 sprendinių.

81.1. Iš uždavinio sąlygos žinome, kad skaičius yra toks: $100a+10(a+c)+c=110a+11c=11(10a+c)$. Taigi jis dalijasi iš 11, nes vienas dauginamasis dalijasi iš 11, o kitas — natūralusis skaičius.

81.2. P i r m a s b ū d a s. Išnagrinėkime skirtumą: $(a-b)^4-a^4-b^4=((a-b)^2-a^2)((a-b)^2+a^2)-b^4=(b^2-2ab)\times\times(2a^2-2ab+b^2)-b^4=2a^2b^2-4a^3b-2ab^3+4a^2b^2+b^4-2ab^3-b^4==6a^2b^2-4a^3b-4ab^3=-4ab(a^2-2ab+b^2)-2a^2b^2=-4ab(a-b)^2--2a^2b^2$;

$-4ab(a-b)^2-2a^2b^2<0$, kai $a>0$ ir $b>0$.

A n t r a s b ū d a s. Sakykime, kad $a\geqslant b$, tada $0<a-b<a$, todėl $(a-b)^4<a^4<a^4+b^4$. Jei $a<b$, tai, kaip jau įrodyta, $(b-a)^4<<a^4+b^4$. Bet $(b-a)^4=(a-b)^4$.

82.1. Visas detales galima suskirstyti, pavyzdžiui, į tris krūveles: 20, 20 ir 25. Po to svarstyklėmis palyginti krūvelių po 20 detalių masę. Jei jų masė būtų vienoda, tai antru svėrimu reikėtų palyginti atidėtų 25 detalių masę su mase 25 detalių, nuimtų nuo svarstyklių lėkštelių.

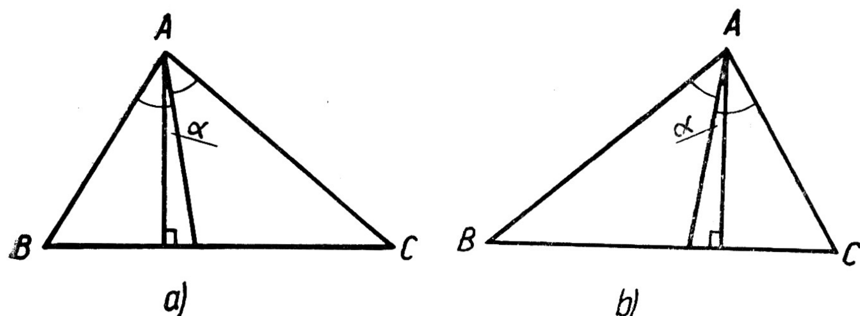
Jeigu po pirmo svėrimo paaiškėtų, jog vienos iš krūvelių (po 20 detalių) masė mažesnė, tai antru svėrimu jos masę turėtume palyginti su mase 20 detalių iš 25 atidėtų.

82.2. Pritaikysime trikampio kampų sumos teoremą ir remsimės trikampio priekampio savybe.

α — kampas, kurį sudaro aukštinė ir pusiaukampinė.

Kai $\angle B>\angle C$ (62 pav., a), tai $\alpha=90^\circ-\left(\angle C+\frac{\angle A}{2}\right)$.

Kai $\angle B<\angle C$ (62 pav., b), tai $\alpha=90^\circ-\left(\angle B+\frac{\angle A}{2}\right)$.



62 pav.

Atitinkamai $\frac{\angle A}{2}=\alpha+(90°-\angle B)$ arba $\frac{\angle A}{2}=\alpha+(90°-\angle C)$.

Todėl $\alpha=90°-\angle C-\alpha-90°+\angle B$ arba

$$\alpha=90°-\angle B-\alpha-90°+\angle C.$$

Gauname $\alpha=\frac{\angle B-\angle C}{2}$ arba $\alpha=\frac{\angle C-\angle B}{2}$.

Kai $\angle B=\angle C$, $\alpha=0$ ir galioja $0=\frac{\angle B-\angle C}{2}$.

83.1. $\frac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n-1})^3}=\frac{(8^n(8+1))^2}{(4^{n-1}(4-1))^3}=\frac{8^{2n}\cdot 3^4}{4^{3(n-1)}\cdot 3^3}=\frac{64^n\cdot 3}{64^{n-1}}=64\cdot 3=192.$

A t s a k y m a s: 192.

83.2. N u r o d y m a s. Įrodykite, kad dvi poros priešingųjų viršūnių yra lygiagretainio viršūnės.

84.1. Žuvų skaičių tvenkinyje pažymėkime raide n. Tada paženklintų ir visų žuvų santykis lygus $\frac{42}{n}$.

Kitą dieną žvejai sugavo 48 žuvis, iš jų 2 buvo paženklintos. Vadinasi, paženklintų ir sugautų žuvų santykis lygus $\frac{2}{48}$. Sakykime, kad paženklintos žuvys maždaug vienodai pasiskirsčiusios tvenkinyje. Tada abu santykiai apytiksliai lygūs:

$$\frac{42}{n}\approx\frac{2}{48},$$

$$n\approx 1008.$$

Galima laikyti, kad tvenkinyje yra apytiksliai 1000 žuvų, sugaunamų tuo tinklu.

A t s a k y m a s: ≈ 1000 žuvų.

84.2. Kadangi $a^2+b^2=6ab$, tai

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=8ab,$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=4ab.$$

Aišku, kad $a+b>0$ ir $a-b>0$. Taigi $a+b=\sqrt{8ab}$ ir $a-b=$ $=\sqrt{4ab}$. Tuomet $\frac{4ab}{a^2-b^2}=\frac{4ab}{\sqrt{8ab\cdot 4ab}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

85.1. Sakykime, kad x — ieškomas natūralusis skaičius, tada $x=$ $=45q+q^2$; $q^2<45$.

Iš čia $0<q\leqslant 6$, t. y. $q=1$; 2; 3; 4; 5; 6.

Atsakymas: 46; 94; 144; 196; 250; 306.

85.2. Pertvarkę lygtį, gauname:

$$x^2(a-b)-x(a-b)(a+b)=0.$$

Jei $a=b$, tai lygtį tenkina kiekvienas skaičius.
Jei $a\neq b$, tai lygties šaknys $x_1=0$ ir $x_2=a+b$. Todėl šaknis bus vienintelė tik tada, kai $a\neq b$ ir $a+b=0$, t. y. kai $a=-b\neq 0$.

86.1. Sakykime, kad vienoje svarstyklių lėkštelėje yra x saldainių, tada kitoje $195-x$. Iš sąlygos suvokiame, kad vienuolikos vienos rūšies saldainių masė lygi keturių kitos rūšies saldainių masei. Kadangi svarstyklės pusiausviros, tai pirmos lėkštelės saldainių skaičius sutinka su antros lėkštelės saldainių skaičiumi, kaip 11 su 4, t. y.

$$\frac{x}{195-x}=\frac{11}{4},$$
$$x=143.$$

Pirmoje lėkštelėje buvo 143 saldainiai, o antroje $195-143=52$.

Atsakymas: 143 saldainiai; 52 saldainiai.

86.2. Apskaičiuojame diskriminantą $D=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2$.
$(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2=(b-c-a)(b-c+a)(b+c-a)(b+c+a)<0$, nes $b<a+c$, $b+a>c$, $b+c>a$, $b+c+a>0$ (remiantis trikampio kraštinių savybėmis). Vadinasi, lygtis neturi realiųjų šaknų.

87.1. Sakykime, kad po x metų vaikų metų suma sudarys 59% tėvų metų sumos. Tada vaikai turės $13+x$, $10+x$ ir $6+x$ metų, o tėvams bus $80+2x$ metų. Sudarome lygtį:

$$\frac{13+x+10+x+6+x}{80+2x}=\frac{59}{100},$$
$$x=10.$$

Tėvams tada bus $80+2\cdot 10=100$ metų. Bet tėvas 4 metais vyresnis,tai jam 52 metai, o motinai 48 metai.

87.2. Kiekvienas natūralusis skaičius, kuris yra kvadratas, gali baigtis skaitmenimis 0, 1, 4, 5, 6, 9. Todėl jo išraiška visada yra tokia:

a) $5m$, kai paskutinis skaitmuo 0 arba 5;
b) $5m+1$, kai paskutinis skaitmuo 1 arba 6;
c) $5m-1$, kai paskutinis skaitmuo 4 arba 9.

Toji sąlyga yra būtina, kad natūralusis skaičius, didesnis už vienetą, būtų kvadratas, bet nėra pakankama.

Pavyzdžiui, skaičiaus 6 išraiška yra $5m+1$ $(m=1)$, tačiau 6 nėra jokio natūraliojo skaičiaus kvadratas.

88.1. Sakykime, kad antro susitikimo vieta yra x km nuo A. Šį atstumą Kazys nuėjo per 1 h. Todėl jo greitis x km/h. Marius $x+4$ km atstumą (nuo antro susitikimo vietos iki B) nuėjo per 2,5 h. Taigi jo greitis $\frac{x+4}{2,5}$ km/h. Iki antro susitikimo Marius iš viso buvo nuėjęs $x+4+x+x=3x+4$ (km), o Kazys — 4 km daugiau, t. y. $3x+8$ km. Ir Kazys, ir Marius iki antro susitikimo ėjo tiek pat laiko. Todėl

$$\frac{3x+8}{x}=\frac{(3x+4)\cdot 2,5}{x+4}.$$

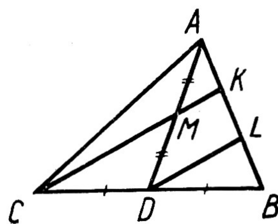
Pagal prasmę $x>0$.

$$9x^2-20x-64=0,$$

$$x_1=4,\quad x_2=-\frac{16}{9}\text{ (netinka pagal prasmę).}$$

Atsakymas: 4 km/h.

88.2. Tiesės CM ir kraštinės AB susikirtimo tašką pažymėkime raide K. Brėžiame $DL\|CK$ (63 pav.). Kampo ABC kraštines kerta lygiagrečios tiesės DL ir CK, todėl pagal Talio teoremą $BL=LK$. Kampo DAB kraštines kerta lygiagrečios tiesės CK ir DL, todėl pagal Talio teoremą $AK=KL$. Vadinasi, $AK=KL=LB$, tai $AK:KB=1:2$.



63 pav.

89.1. Sakykime, kad x km/h — motorlaivio greitis stovinčiame vandenyje, y km/h — upės tėkmės greitis, o pasroviui motorlaivis nuplaukė a km. Pasroviui jis plaukė $\frac{a}{x+y}$ h, o prieš srovę $\frac{a}{x-y}$ h. Motorlaivis $2a$ km stovinčiame vandenyje nuplaukia per $\frac{2a}{x}$ h. Norėdami palyginti reiškinius $\frac{a}{x+y}+\frac{a}{x-y}$ ir $\frac{2a}{x}$, išnagrinėkime jų skirtumą:

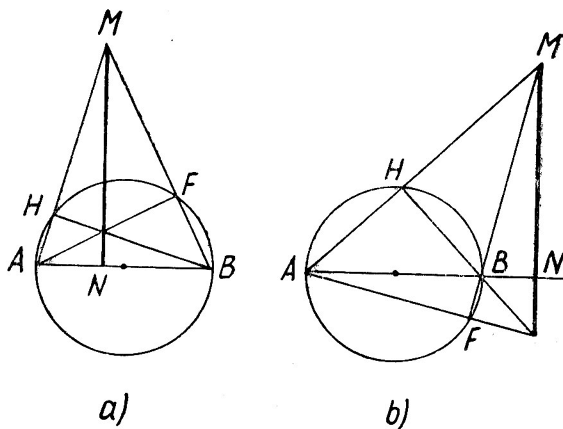
$$\frac{2ax}{x^2-y^2}-\frac{2a}{x}=\frac{2ax^2-2ax^2+2ay^2}{x(x^2-y^2)}=\frac{2ay^2}{x(x^2-y^2)}.$$

Iš sąlygos aišku, kad $a>0$, $x>0$, $y>0$, $x>y$. Todėl

$$\frac{2ay^2}{x(x^2-y^2)}>0.$$

Vadinasi, $\frac{a}{x+y}+\frac{a}{x-y}>\frac{2a}{x}$.

Atsakymas: motorlaivis sugaišta daugiau laiko kelionėje upe negu nuplaukdamas tą patį nuotolį ežeru.

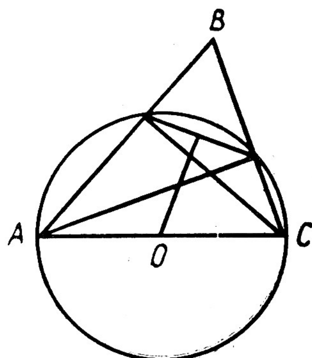


64 pav.

89.2. Iš 64 paveikslo aišku, kaip reikia braižyti. Įrodymas pagrįstas tokiu teiginiu: visos trikampio aukštinės susikerta viename taške. Atkarpos AF ir BH yra trikampio AMB aukštinės, tai atkarpa MN bus trečioji šio trikampio aukštinė, nes tiesė MN eina per dviejų aukštinių susikirtimo tašką. Vadinasi, tiesės MN ir AB yra statmenos.

90.1. $13-12=11-10=9-8-7+6+5-4-3+2+1$. Sakykime, kad, parašius pliusus, minusus ir vieną lygybės ženklą, gaunama teisinga lygybė. Kadangi iš viso yra 7 nelyginiai dėmenys, tai vienoje lygybės pusėje bus lyginis nelyginių dėmenų skaičius, o kitoje — nelyginis tokių dėmenų skaičius. Nelyginio skaičiaus nelyginių dėmenų (nepriklausomai nuo jų ženklų) suma yra nelyginė. Lyginio skaičiaus nelyginių dėmenų suma yra lyginė. Ji taip pat nepriklauso nuo dėmenų ženklų. Lyginiai dėmenys sumos lyginumo nekeičia. Taigi vienoje lygybės pusėje gauname lyginę sumą, o kitoje — nelyginę. Vadinasi, lygybė neteisinga. Taigi, parašę pliusus, minusus ir tik vieną lygybės ženklą, negauname teisingos lygybės.

90.2. Trečia to trikampio kraštinė AC yra apskritimo skersmuo. Apskritimas nubrėžtas per dviejų trikampio aukštinių pagrindus (65 pav.). Atkarpa, jungianti tuodu pagrindus, yra nubrėžto apskritimo styga. Todėl šios stygos vidurio statmuo eina per apskritimo centrą, t. y. per trečios trikampio kraštinės AC vidurį.



65 pav.

91.1. Sakykime, kad trijų kapeikų monetų yra n, tada dviejų kapeikų monetų $(100-3n):2$. Šitas skaičius turi būti sveikasis ir neneigiamas. Iš čia n — lyginis skaičius ir $3n \leqslant 100$. Vadinasi, n gali būti lygus 0, 2, 4, ..., 32. Iš viso yra 17 keitimo būdų. Analogiškai samprotaudami išsiaiškiname, kad antruoju atveju yra tik 11 keitimo būdų.

91.2. $\frac{(1+ab)^2}{(a+b)^2}-1<0,$

$$\frac{1+2ab+a^2b^2-a^2-2ab-b^2}{(a+b)^2}<0,$$

$$\frac{(1-a^2)-b^2(1-a^2)}{(a+b)^2}<0,$$

$$\frac{(1-a^2)(1-b^2)}{(a+b)^2}<0.$$

Kadangi $(a+b)^2>0$, tai nelygybė ekvivalenti dviem sistemoms:

$$\begin{cases} 1-a^2<0, \\ 1-b^2>0 \end{cases} \text{arba} \begin{cases} 1-a^2>0, \\ 1-b^2<0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} |a|>1, \\ |b|<1 \end{cases} \text{arba} \begin{cases} |a|<1, \\ |b|>1. \end{cases}$$

Taigi nelygybė teisinga tik tada, kai $|a|>1$ ir $|b|<1$ arba kai $|a|<1$ ir $|b|>1$.

92.1. Sunumeruokime iš eilės aštuonkampio viršūnes. Sudarykime tokias gretimų viršūnių poras: 1 ir 2, 3 ir 4, 5 ir 6, 7 ir 8. Viršūnes 1 ir 5, 2 ir 6, 3 ir 7, 4 ir 8 vadinkime priešingomis.

a) Kai Audrius pastato gairelę kurioje nors viršūnėje, Balys turi statyti tos pačios spalvos gairelę kitoje sudarytos poros viršūnėje. Taip žaisdamas Balys laimi, nes Audrius negali įgyvendinti savo sumanymo.

b) Jei pirmasis gairelę stato Balys, tai Audrius gali jas išdėstyti taip, kad keturiose iš eilės einančiose viršūnėse būtų visų spalvų gairelės, t. y. laimėti žaidimą. Jis kiekvieną kartą turi statyti tos pačios spalvos gairelę priešingoje aštuonkampio viršūnėje.

92.2. N u r o d y m a s. Reikia sujungti tašką B su atkarpos CD vidurio tašku K ir, įrodžius, kad tiesės DM ir BK lygiagrečios, du kartus taikyti Talio teoremą.

A t s a k y m a s: 1 : 2.

93.1. $ABCD = \frac{XYYXXY}{YX} = \frac{YX \cdot 100 + XY \cdot 10\,001}{YX} = 100 + \frac{XY \cdot 10\,001}{YX}$.

Kadangi $10\,001 = 73 \cdot 137$ yra penkiaženklis skaičius, o kairiojoje lygybės pusėje skaičius $ABCD$ keturženklis, tai $XY < YX$. Kad paskutinis dalmuo būtų sveikasis skaičius, YX turi dalytis iš vieno skaičiaus 10 001 pirminio daliklio. Taigi $YX = 73$. Vadinasi, $377\,337 : 5169 = 73$.

93.2. Lygybė $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ ekvivalenti lygybei $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$. Kadangi kiekvienas dėmuo lygus 0, tai $a = b = c$.

94.1. Kadangi dviejų skaičių dalmuo lygus 5, tai jų skirtumas 4 kartus didesnis už mažesnį skaičių. Kadangi skirtumas irgi lygus 5, tai mažesnis skaičius yra $\frac{5}{4}$, o didesnis — $\frac{25}{4}$.

Jei $x - y = \frac{x}{y} = a$, tai $x = \frac{a^2}{a-1}$, $y = \frac{a}{a-1}$ $(a \neq 1)$.

94.2. Kiekvieną sveikąjį skaičių x galime išreikšti šitaip: $3n$ arba $3n \pm 1$. Jei tokios išraiškos skaičius įrašytume į lygtį $x^2 - 3y^2 = 17$, tai gautume atitinkamai $3(3n^2 - y^2) = 17$ arba $3(3n^2 \pm 2n - y^2) = 16$. Kadangi nei 17, nei 16 nesidalija iš 3, duota lygtis neturi sveikųjų sprendinių.

95.1. Kairiojoje lygties pusėje esančių dviejų narių skirtumas lygus nelyginiam skaičiui 41. Vadinasi, vienas jų turi būti nelyginis, o kitas — lyginis skaičius. Kadangi $104y$ lyginis, tai $187x$ nelyginis. Iš čia x — nelyginis skaičius. Taigi pora $x = 314$, $y = 565$ netenkina tos lygties.

95.2. Sakykime, kad reikia įpilti x l vandens.

$$30(x+6) < x \cdot 50 + 6 \cdot 15 < 40(x+6),$$
$$3x + 18 < 5x + 9 < 4x + 24,$$
$$\begin{cases} 5x + 9 > 3x + 18, \\ 5x + 9 < 4x + 24; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x > 4{,}5, \\ x < 15; \end{cases}$$
$$4{,}5 < x < 15.$$

Uždavinio sprendimas pagrįstas iš fizikos kurso žinoma šilumos kiekio formule $Q = cm(t_2 - t_1)$.

A t s a k y m a s: daugiau kaip 4,5 l, bet mažiau kaip 15 l.

96.1. Iš sąlygos: $(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)=(2m-1)^2$,

$$(4n^2-9)(4n^2-1)=(2m-1)^2,$$
$$(4n^2-5-4)(4n^2-5+4)=(2m-1)^2,$$
$$(4n^2-5)^2-16=(2m-1)^2,$$
$$(4n^2-5)^2-(2m-1)^2=16,$$
$$(4n^2-6+2m)(4n^2-4-2m)=16,$$
$$(2n^2-3+m)(2n^2-2-m)=4.$$

Kadangi dauginamųjų suma $(2n^2-3+m)+(2n^2-2-m)=$ $=4n^2-5$ yra nelyginė, tai vienas iš jų lyginis, kitas ne. Pirmas dauginamasis didesnis, taigi tinka tik skaidiniai $4=4\cdot 1=$ $=(-1)\cdot(-4)$. Tada

$$\begin{cases} 2n^2-3+m=4, \\ 2n^2-2-m=1 \end{cases} \text{arba} \begin{cases} 2n^2-3+m=-1, \\ 2n^2-2-m=-4. \end{cases}$$

Pirmoji sistema sprendinių neturi, nes $m=2$ ir $n^2=2{,}5$. Antrosios sistemos sprendiniai: $m=2$, $n=0$.

Atsakymas: $9=(-3)\cdot(-1)\cdot 1\cdot 3$.

96.2. Sakykime, kad $1\ 111\ 111\ 111=x$.

Tada $A=\frac{5x-2}{5x+2}$ ir $B=\frac{6x-2}{6x+3}$.

Išnagrinėkime skirtumą:

$$A-B=\frac{5x-2}{5x+2}-\frac{6x-2}{6x+3}=\frac{x-2}{(5x+2)(6x+3)}>0.$$

Vadinasi, $A>B$.

97.1. Kadangi $(n^2+n)^2=n^4+2n^3+n^2<n^4+2n^3+2n^2+n+1<n^4+$ $+2n^3+3n^2+2n+1=(n^2+n+1)^2$, tai nurodytas natūralusis skaičius yra tarp dviejų iš eilės einančių natūraliųjų skaičių kvadratų. Vadinasi, jis negali būti skaičiaus kvadratas.

97.2. Sakykime, kad x ir y — ieškomi skaičiai. Pagal sąlygą: $xy=\frac{x}{y}$ $(y\neq 0)$, $xy^2=x$, $x(y^2-1)=0$.

Šią ir pradinę lygtį tenkina tokios reikšmės:

a) $x=0$, y — bet kuris skaičius, nelygus nuliui;

b) x — bet kuris skaičius, $y=1$;

c) x — bet kuris skaičius, $y=-1$.

98.1. $\overline{xyz}-\overline{zyx}=297$,

$$100x+10y+z-100z-10y-x=297,$$
$$99(x-z)=297.$$
$$x-z=3.$$

Kadangi $\overline{xyz}$ dalijasi iš 45 (taigi ir iš 5), tai $z=5$ ir $x=8$ arba $z=0$ ir $x=3$. Bet $\overline{xyz}$ dalijasi ir iš 9, todėl $x+y+z$ dalijasi iš 9. Pirmu atveju $x+y+z=13+y$, todėl $y=5$. Antru atveju $x+y+z=$ $=3+y$, todėl $y=6$.

Atsakymas: 855 arba 360.

98.2. Iš uždavinio sąlygos:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a}{b}-\frac{c}{d},$$

$$\frac{ac}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}.$$

Iš čia: $ac=ad-bc$. (1)

Randame skaičių, atvirkštinių duotiesiems, skirtumą:

$$\frac{b}{a}-\frac{d}{c}=\frac{bc-ad}{ac}.$$

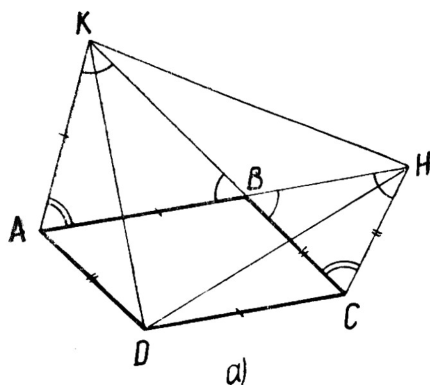
Remdamiesi (1) lygybe, gauname:

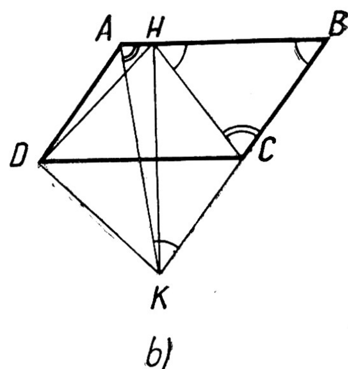
$$\frac{b}{a}-\frac{d}{c}=\frac{bc-ad}{ad-bc}=-1.$$

99.1. n — nelyginis skaičius, nes jis pirminis ir didesnis už 5. Taigi $(n-1)$ ir $(n+1)$ — du iš eilės einantys lyginiai skaičiai. Vadinasi, abu dalijasi iš 2, o vienas — ir iš 4. Tada $(n-1)(n+1)$ dalijasi iš 8.

Įrodysime, kad skaičius $(n-1)(n+1)$ dalijasi ir iš 3. Iš tikrųjų: vienas iš trijų iš eilės einančių natūraliųjų skaičių $(n-1)$, n, $(n+1)$ dalijasi iš 3. Kadangi n — pirminis skaičius, ne mažesnis už penkis, jis nesidalija iš 3. Todėl iš 3 dalijasi arba $(n-1)$, arba $(n+1)$. Tuo pačiu įrodėme, kad n^2-1 dalijasi iš 24.

99.2. Kadangi $AD=CH$, $AK=DC$ ir $\angle DAK=\angle DCH$, tai $\triangle AKD=\triangle CDH$ (66 pav.).





66 pav.

Iš trikampių lygumo

$$DK=DH.$$

Vadinasi, $\triangle KDH$ — lygiašonis.

100.1. Sakykime, kad $x \geqslant 1$ — ieškomojo skaičiaus dešimčių skaitmuo, o y — vienetų skaitmuo, tuomet $\overline{xy} = 3xy$, $10x + y = 3xy$, $10x = 3xy - y$, $y = \frac{10x}{3x-1}$, o $3y = \frac{30x}{3x-1} = \frac{30x-10+10}{3x-1} = 10 + \frac{10}{3x-1}$. Vadinasi, $3x-1 \geqslant 2$ yra 10 daliklis. Randame $x=1$, $y=5$ arba $x=2$, $y=4$.

Atsakymas: 15; 24.

100.2. $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ dalijasi iš 6 kaip trijų iš eilės einančių sveikųjų skaičių sandauga. Vadinasi, n^3 ir n padalijus iš 6, gaunama ta pati liekana. Suprantama, kad reiškinius $a^3+b^3+c^3$ ir $a+b+c$ padalijus iš 6, taip pat gaunamos vienodos liekanos. Kadangi pagal sąlygą $a+b+c$ dalijasi iš 6, tai ir $a^3+b^3+c^3$ dalijasi iš 6.

101.1. Sakykime, kad skaičių 100 reikia sumažinti x vienetų, tada $100 - x = 5a + 1$, $100 - x = 7b + 1$; čia $a, b \in N$.

Sprendžiame sistemą:

$$\begin{cases} 100 - x = 5a + 1, \\ 100 - x = 7b + 1, \\ a - b = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a + 1 = 7b + 1, \\ b = a - 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 7, \\ b = 5. \end{cases}$$

Iš čia $x = 100 - 36 = 64$.

Atsakymas: 64.

101.2. Skritulių plotus pažymėkime raidėmis S_1 ir S_2, o jų bendrosios dalies plotą — raide Q. Reikia rasti $|(S_1 - Q) - (S_2 - Q)| = |S_1 - S_2| = \pi \cdot 20^2 - \pi \cdot 15^2 = 175\pi$.

102.1. Pagal sąlygą $\overline{x0z} = k \cdot \overline{xz}$; čia $k \in N$, t. y.

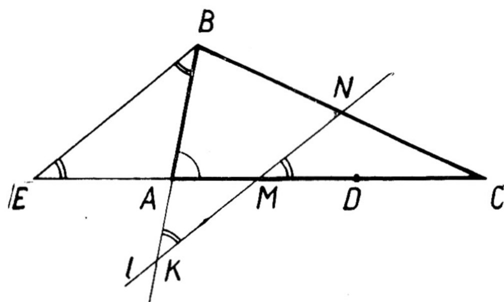
$$100x + z = k(10x + z),$$
$$100x + z = 10xk + kz,$$

$$10x(10-k) = z(k-1),\ 1 < k \leqslant 10,\ 0 < x \leqslant 9,\ 0 \leqslant z \leqslant 9.$$

Dešinioji lygybės pusė dalijasi iš 5, todėl arba $k=6$, arba $z=0$, arba $z=5$.

1) Kai $k=6$, tai $8x = z$, $x=1$, $z=8$.
2) Kai $z=0$, tai $k=10$, $x=1, 2, 3, \ldots, 9$.
3) Kai $z=5$, tai $2x = \frac{k-1}{10-k} = \frac{k-10}{10-k} + \frac{9}{10-k} = \frac{9}{10-k} - 1$. Iš čia $10 - k = 3$ arba $10 - k = 1$, todėl $k=7$, $x=1$ arba $k=9$, $x=4$.

Atsakymas: 105; 108; 405; $\overline{a00}$ (čia $a = 1, 2, 3, \ldots, 9$).



67 pav.

102.2. Spindulyje CA atidėkime $AE=AB$ (67 pav.). Kampas α — trikampio EAB priekampis, todėl $\angle BEA=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{\alpha}{2}$. Kadangi $CN=NB$, $CM=ME$, tai tiesė l lygiagreti tiesei EB ir $\angle NKB=$ $=\angle EBA=\angle BEA=\frac{\alpha}{2}$.

103.1. Tarkime, kad $x^3+5x^2+8x+6=A(x+1)^3+B(x+1)^2+$ $+C(x+1)+D$. Tada $x^3+5x^2+8x+6=Ax^3+x^2(3A+B)+$ $+x(3A+2B+C)+A+B+C+D$.
Išsprendę sistemą

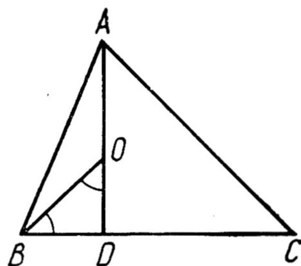
$$\begin{cases} A=1, \\ 3A+B=5, \\ 3A+2B+C=8, \\ A+B+C+D=6, \end{cases}$$

gauname $A=1$, $B=2$, $C=1$, $D=2$. Vadinasi, $x^3+5x^2+8x+6=$ $=(x+1)^3+2(x+1)^2+(x+1)+2$.

A n t r a s b ū d a s. $x^3+5x^2+8x+6=(x+1)^3+2x^2+5x+5=$ $=(x+1)^3+2(x+1)^2+x+3=(x+1)^3+2(x+1)^2+(x+1)+2$.

103.2. Aukštinėje AD pažymėkime tašką O taip, kad $\angle OBD=45°$ (68 pav.). Tada $\angle ABO=\angle BAO=22°30'$, $OD=BD$, $AO=BO=$ $=BD\sqrt{2}$ ir $AD=AO+OD=BD(1+\sqrt{2})$.

Iš čia $BD=\frac{AD}{1+\sqrt{2}}$; $DC=BC-BD=$ $=AD\sqrt{2}-\frac{AD}{1+\sqrt{2}}=AD$. Vadinasi, trikampis ADC yra statusis lygiašonis, todėl $\angle BAC=\angle BAD+\angle DAC=67°30'$.



68 pav.

104.1. $\frac{3(n^3+(n+1)^3+(n+2)^3-3n(n+1)(n+2))}{n+(n+1)+(n+2)}=$ $=\frac{9n+9}{n+1}=9$.

104.2. Remdamiesi proporcingųjų atkarpų teorema rašome:

$$\frac{OA_1}{OA}=\frac{OB_1}{OB}.$$

Bet $OA_1=OA+AA_1$ ir $OB_1=OB+BB_1$,

todėl $\frac{OA+AA_1}{OA}=\frac{OB+BB_1}{OB}$,

$1+\frac{AA_1}{OA}=1+\frac{BB_1}{OB}$. Vadinasi, ir $\frac{AA_1}{OA}=\frac{BB_1}{OB}$, arba $\frac{OA}{AA_1}=\frac{OB}{BB_1}$.

105.1. Reikia įrodyti nelygybę $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$; čia $a>0$.

Imame skirtumą:

$\left(a+\frac{1}{a}\right)-2=\frac{a^2+1-2a}{a}=\frac{(a-1)^2}{a}\geqslant 0$, nes $a>0$.

Vadinasi, su kiekviena teigiama a reikšme nelygybė yra teisinga.

105.2. Reikia įrodyti: jei $\angle ABD=\angle DBC$, tai

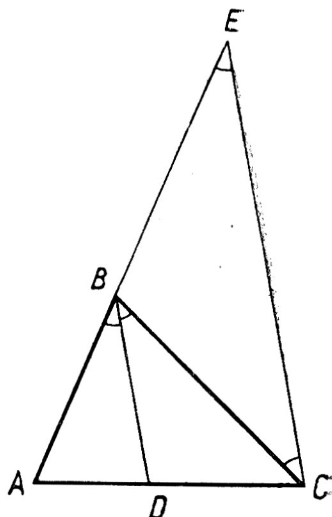
$$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}.$$

Brėžkime tiesę CE, lygiagrečią tiesei BD. Ji kirs kraštinės AB tęsinį taške E (69 pav.). Remiamės VII—VIII klasės 104.2 uždaviniu:

$$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BE}.$$

Trikampis CBE lygiašonis, nes $\angle BCE=\angle DBC$ ir $\angle BEC=\angle ABD$ (kaip kampai, gauti lygiagrečias tieses perkirtus trečiąja). Bet $\angle DBC=\angle ABD$. Todėl $\angle BCE=\angle BEC$. Vadinasi, $BE=BC$. Taigi

$$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}.$$



69 pav.

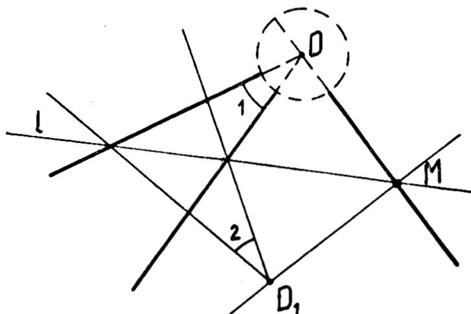
IX—X KLASĖ

1.1. Pavyzdžiui, bilietai, kurių numeriai 000 001 — 001 000 arba 998 999 — 999 998, nėra „laimingi". Taigi į pirmą klausimą atsakymas neigiamas.

Iš 10 bilietų nuo 100 001 iki 100 010 pirmas ir paskutinis „laimingi".

Tarp 9 iš eilės einančių bilietų niekada nerasime dviejų „laimingų". Įrodysime tai. Sakykime, kad bilietas, kurio numeris $\overline{xyzabc}$, yra „laimingas". Jei $\overline{abc}+9<1000$, tai kitas „laimingas" bus tik dešimtas iš eilės einantis bilietas, nes skaitmenų suma gali nepasikeisti tik tada, kai prie $\overline{abc}$ pridedama ne mažiau kaip 9 vienetai, pavyzdžiui, $527+9=536$. Jei $\overline{abc}+9\geqslant 1000$, tai $a=b=9$ ir $a+b+c=x+y+z>18$. Nesunku įsitikinti, kad tarp devynių iš eilės einančių tokios išraiškos skaičių ($\overline{xyz991}$ — $\overline{xyz999}$) tik vienas gali būti „laimingas". O jau kitas „laimingas" bilietas pasitaikys ne anksčiau kaip po 10 numerių.

1.2. Per tašką M nubrėžkime bet kokią tiesę l, kertančią kampo kraštines. Duotam kampui ($\angle 1$) raskime simetrišką kampą ($\angle 2$) tiesės l atžvilgiu (70 pav.). Tada taškas D_1 bus simetriškas taškui D tiesės l atžvilgiu. MD_1 — ieškomos tiesės MD vaizdas, gautas simetrija tiesės l atžvilgiu.



70 pav.

2.1. Sakykime, kad yra du tokie bičiuliai A ir B, kurie tą momentą dar nebuvo paspaudę vienas kitam rankų (jei tokių nebūtų, tai visi būtų paspaudę vienas kitam rankas).

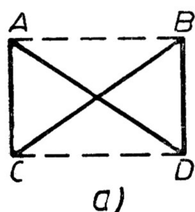
Jei visi kiti bičiuliai, išskyrus A ir B, jau būtų pasisveikinę, tai tik juodu turėtų vieną kartą viens kitam paspausti ranką. Išnagrinėkime atvejus, kai, be A ir B, yra daugiau nepasisveikinusių bičiulių.

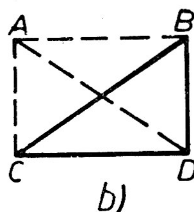
a) Negali būti dar dviejų bičiulių C ir D nepaspaudusių vienas kitam rankos, nes tuomet iš keturių bičiulių A, B, C, D nė vienas nebūtų paspaudęs rankų kitiems trims (71 pav., a).

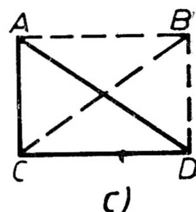
b) Negali atsirasti ir tokių dviejų bičiulių C ir D, kurie abu nebūtų spaudę arba A rankos, arba B rankos, nes ir šiuo atveju iš keturių bičiulių A, B, C, D nė vienas nebūtų paspaudęs rankų kitiems trims (71 pav., b — c).

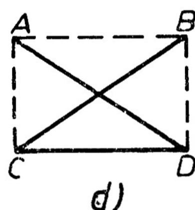
c) Dėl tos pačios priežasties negali būti ir tokių dviejų bičiulių C ir D, kurių vienas nebūtų pasisveikinęs su vienu iš A ir B, o antras — su kitu (71 pav., d — e).

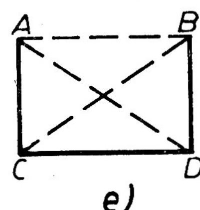
——————— paspaudė
– – – – – – nepaspaudė

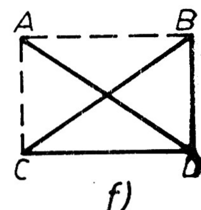


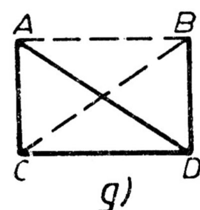


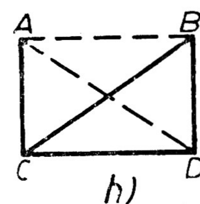


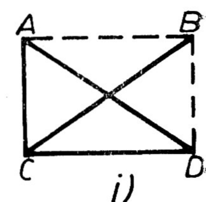


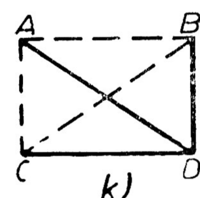


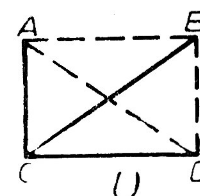










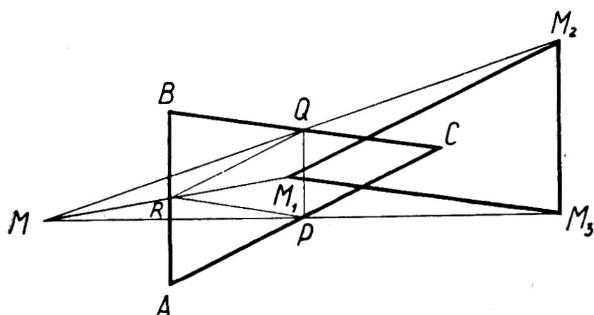


71 pav.

d) Tačiau iš dviejų bičiulių *C* ir *D* gali būti vienas, dar nepaspaudęs arba *A* rankos, arba *B* rankos, arba jų abiejų rankos (71 pav., *f* — *l*).

Išnagrinėję a) — d) atvejus, darome išvadą: jei yra du bičiuliai *A* ir *B*, kurie nepasisveikino, gali būti tik vienas bičiulis, nepasisveikinęs arba su *A*, arba su *B*, arba su jais abiem. Tais atvejais dar turi būti du arba trys rankų paspaudimai.

Vadinasi, visais galimais atvejais dar reikia paspausti rankas ne daugiau kaip tris kartus.

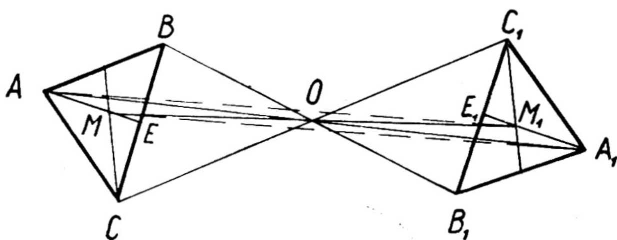


72 pav.

2.2. Sakykime, kad P, Q, R — trikampio ABC kraštinių vidurio taškai (72 pav.). PQ — trikampių ABC ir MM_2M_3 vidurinė linija, RQ — trikampių ABC ir MM_1M_2 vidurinė linija, PR — trikampių ABC ir MM_1M_3 vidurinė linija. Tuo remdamiesi įrodome, jog trikampių ABC ir $M_1M_2M_3$ kraštinės yra lygios.

3.1. Laikrodis turėjo mušti 1, 5, 1, 6, 1, 7, 1, 8, 1, 9, 1, 10, 1, 11, 1, 12, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, ... dūžius. Reikia rasti sekos „atkarpas", kurias sudarančių skaičių suma lygi 29. Surasime tų „atkarpų" pradžią ir pabaigą. Pirmųjų septynių sekos narių suma lygi 22, o pirmųjų aštuonių narių suma jau 30. Todėl pirmu nariu prasidedančios „atkarpos" suma negali būti 29. „Atkarpos", prasidedančios antru sekos nariu (nuo 5 iki 8 imtinai), skaičių suma lygi 29. Šiuo atveju laikrodis sustojo išmušęs 8 valandas, bet neišmušęs pusvalandžio po jų, t. y. sustojo tarp 8.00 ir 8.30 valandos. Analogiškai samprotaudami, randame dar dvi „atkarpas", kurių skaičių suma 29. Tai nuo 8 iki 10 ir nuo 11 iki 2 valandos. Šiais atvejais laikrodis sustojo tarp 10.00 ir 10.30 valandos arba tarp 14.00 ir 14.30 valandos.

3.2. Kadangi trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ simetriški taško O atžvilgiu, tai jie lygūs. Jų atitinkamos pusiaukraštinės AE ir A_1E_1 (73 pav.) taip pat simetriškos ir lygios. Taigi keturkampis AM_1A_1M — lygiagretainis, kurio AA_1 ir M_1M — įstrižainės. Vadinasi, taškas O dalija jas pusiau. Iš čia taškai M_1 ir M simetriški taško O atžvilgiu.



73 pav.

4.1. Pastebėję, kad $38^2=1444$, ir suvokę, kad sandaugos trys paskutiniai skaitmenys priklauso tik nuo dauginamųjų trijų paskutinių skaitmenų, nesunkiai randame begalinę aibę skaičių, turinčių sąlygoje nurodytą savybę. Norint įrodyti, pakanka pateikti tokį „nepilnos daugybos pavyzdį“:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}\ldots 038\\ \ldots 038\end{array}\\ \hline \ldots 304\\ +\ldots 14\\ \ldots 0\\ \hline \ldots 444 \end{array}$$

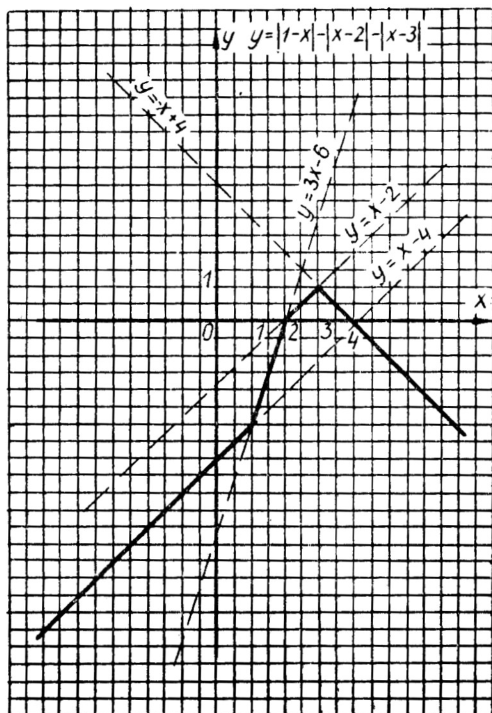
4.2. a) $x<1$, $y=1-x-(-x+2)-(-x+3)$, $y=x-4$;

b) $1\leqslant x<2$, $y=-1+x-(-x+2)-(-x+3)$, $y=3x-6$;

c) $2\leqslant x<3$, $y=x-1-x+2-(-x+3)$, $y=x-2$;

d) $x\geqslant 3$, $y=x-1-(x-2)-(x-3)$, $y=-x+4$.

Funkcijos grafikas nubraižytas 74 paveiksle.



74 pav.

5.1. Pirmas būdas. Spręsdami lygtį galime remtis intervalų metodu, panašiai kaip ir IX—X klasės 4.2 uždavinyje.

Antras būdas. Tarkime, kad $x-2{,}5=y$, tada

$|y-0{,}5|+|y+0{,}5|=4,$

$(y-0{,}5)^2+2|y^2-0{,}25|+(y+0{,}5)^2=16,$

$y^2+0{,}25+|y^2-0{,}25|=8.$

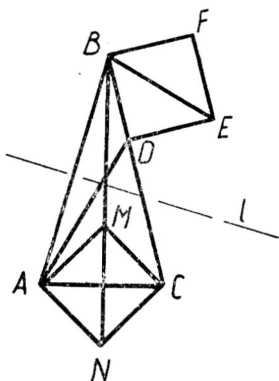
Bet $y^2>0{,}25$ (priešingu atveju lygties kairioji pusė būtų aiškiai per maža). Gauname lygtį $2y^2=8$, $y=\pm 2$, tuomet $x=0{,}5$ arba $x=4{,}5$.

Atsakymas: 0,5; 4,5.

5.2. Nubraižykime du kvadratus: vieną, kurio kraštinė BD, trikampio ABC išorėje, o kitą — taip, kad jo įstrižainė būtų AC (75 pav.). Remdamiesi lygybe $AC : BD = \sqrt{2}$ darome išvadą, kad kvadratai $BFED$ ir $AMCN$ lygūs.

Kadangi $\angle ABE = \angle ABD + \angle DBE = 30° + 45° = 75° = \angle BAC$, tai taškai A ir B, C ir E simetriški atžvilgiu tiesės l, statmenos atkarpai AB ir einančios per jos vidurį. Vadinasi, nagrinėjami kvadratai simetriški tiesės l atžvilgiu. Iš čia išplaukia, kad $\angle DAC = \angle MBE = \angle MBD + \angle DBE = 15° + 45° = 60°$.

Atsakymas: 60°.



75 pav.

6.1. Skaitmenys yra vienaženkliai pirminiai skaičiai 2, 3, 5, 7.

Jei ieškomas skaičius prasideda skaitmeniu 2, tai jis turi dalytis iš 2, vadinasi, turi baigtis skaitmeniu 2. Antras to skaičiaus skaitmuo gali būti tik 2, nes 232 nesidalija iš 3, 252 — iš 5, 272 — iš 7. Taigi ieškomas skaičius yra 222.

Jei ieškomas skaičius prasideda skaitmeniu 5, tai jis yra 555.

Jei ieškomas skaičius prasideda skaitmeniu 3, tai du paskutiniai to skaičiaus skaitmenys turi sudaryti skaičių, dalų iš 3. Tuodu skaitmenys gali būti arba 3 ir 3, arba 2 ir 7, arba 5 ir 7. Bet 327 nesidalija iš 2, 357 — iš 5, 372 ir 375 — iš 7. Uždavinio sąlygą atitinka tik skaičius 333.

Jei ieškomas skaičius prasideda skaitmeniu 7, tai du paskutiniai to skaičiaus skaitmenys turi sudaryti skaičių, dalų iš 7. Išrinkime ir parašykime visus dviženklius skaičius, kurie yra 7 kartotiniai:

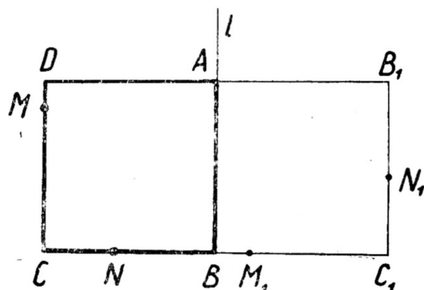
14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98. Matome, kad tik 35 ir 77 sudaryti iš sąlygoje nurodytų skaitmenų. Radome dar du sprendinius: 735 ir 777.

Atsakymas: 222, 333, 555, 735, 777.

6.2. Matome, kad trikampis BAB_1 atvaizduojamas į trikampį CAC_1 posūkiu apie tašką A 60° kampu. Kadangi atkarpa BB_1 atvaizduojama į atkarpą CC_1, tai kampas tarp tiesių BB_1 ir CC_1 lygus posūkio kampui, t. y. 60°, o atkarpos BB_1 ir CC_1 lygios.

7.1. Ieškomas skaičius $\overline{579abc}$ dalijasi iš $5\cdot7\cdot9=315$. Kadangi $\overline{579abc}=1838\cdot315+30+\overline{abc}$, tai skaičius $30+\overline{abc}$ turi būti lygus arba 315, arba $2\cdot315=630$, arba $3\cdot315=945$, t. y. $\overline{abc}$ turi būti lygus arba 285, arba 600, arba 915.

7.2. A n a l i z ė. Sakykime, kad stulpų vietos pažymėtos taškais A, M, N (76 pav.). Pasukus kvadratą $ABCD$ 90° kampu prieš laikrodžio rodyklę apie tašką A, kvadratas $ABCD$ atvaizduojamas į AB_1C_1B, taškas M — į M_1, taškas N — į N_1. Aišku, kad atkarpos AB ir NM_1 yra statmenos.



76 pav.

B r ė ž i m a s

1. Randame tašką M_1, taško M vaizdą, gautą posūkiu apie tašką A 90° kampu.
2. Brėžiame atkarpą NM_1.
3. Per tašką A brėžiame tiesę l, statmeną atkarpai NM_1. Atkarpos NM_1 ir tiesės l susikirtimo tašką pažymime raide B.
4. Braižome kvadratą $ABCD$, kurio kraštinė AB.

8.1. Spręskime didesnįjį skaičių dalydami iš 4 (kaip V—VI klasės 73.2 uždavinį):

$$\begin{array}{r|l} 102564 & \\ 4abcdef\ldots & 4 \\ \cline{2-2} -\underline{4} & 102564 \\ -\underline{10} & abcdef\ldots \\ \underline{8} & \\ -\underline{22} & \\ \underline{20} & \\ -\underline{25} & \\ \underline{24} & \\ -\underline{16} & \\ \underline{16} & \\ 0 & \end{array}$$

Toliau dalyti nereikia, nes gavome šešiaženklį skaičių 102 564, kuris yra mažiausias natūralusis skaičius, tenkinantis visus uždavinio reikalavimus.

A t s a k y m a s: 102 564.

8.2. Nurodymas. Nubrėžkite vieno apskritimo vaizdą, gautą posūkiu apie tašką O 60° kampu. Nubrėžto ir antro iš duotų apskritimų susikirtimo taškas yra antroji ieškomo trikampio viršūnė.

9.1. Tarkime, kad ieškomas skaičius $10b+a$. Jo paskutinis skaitmuo a yra nelyginis, o b — bet kuris skaičius. Tuomet $(10b+a)^2 = 100b^2+10 \cdot 2ab+a^2$. Šios sumos pirmo dėmens paskutiniai du skaitmenys yra nuliai, antro dėmens priešpaskutinis skaitmuo lyginis, o paskutinis nulis, dėmuo a^2 gali būti tik 1, 9, 25, 49 arba 81. Vadinasi, tos sumos dešimčių skaitmuo yra lyginis. Įrodėme, kad nelyginių skaičių kvadratų priešpaskutinis skaitmuo visada lyginis. Todėl uždavinio sąlygą tenkina tik vienaženkliai skaičiai 1 ir 3.

Atsakymas: 1 ir 3.

9.2. $p \in N$, $p=1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14, 16, 17, 19, \ldots$.

a) $p=2, 4, 8$. Pusiaukampinėmis padalijame kampą į nurodytą skaičių lygių dalių.

b) $p=7$. Nuosekliai 13 kartų atidedame kampą $\alpha=7°$. Gauname kampą $\beta=91°$. Per viršūnę nubrėžiame statmenį vienai kampo β kraštinei ir gauname kampą $\gamma=90°$. Tada $\beta-\gamma=1°$. Atidėję nuosekliai 1° kampą nuo vienos duoto kampo kraštinės, jį padalysime į 7 lygias dalis.

c) $p=11$. Taigi $\alpha=11°$. Nubraižome kampą $\beta=8\alpha=88°$ ir papildome jį iki kampo $\gamma=90°$. Tada $\gamma-\beta=2°$. Padalijį jį pusiau, gauname 1° kampą. Dabar nesunku kampą α padalyti į 11 lygių dalių.

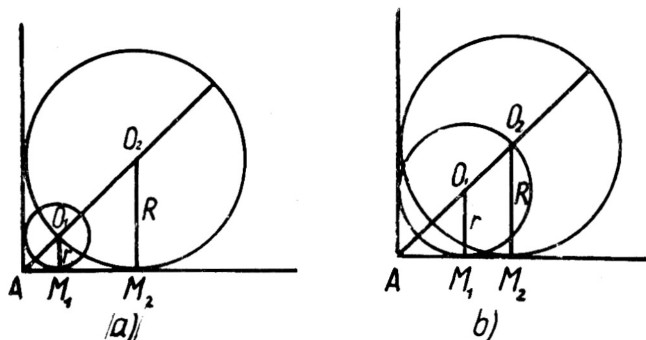
d) $p=13$. Nubraižome $\beta=7\alpha=91°$, o toliau — kaip ir b) atveju.

e) $p=14$. Pasinaudojant a) ir b) atvejų brėžimais, duotas kampas padalijamas į 14 lygių dalių.

f) Visoms kitoms p reikšmėms galioja lygybė $p=15k+q$, kurios $k \in N$, $q=1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$. Kampą $\alpha=15°$ braižome šitaip: vieną lygiakraščio trikampio kampą padalijame į 4 lygias dalis. Atidėjus duotajame kampe 15° kampą k kartų, lieka q laipsnių kampas. Kaip tokį kampą padalyti į q lygių dalių, paaiškinta a) — e) atveju.

10.1. Sakykime, kad x ir y — ieškomi skaičiai. Pažymėkime skaičių $x^2=y^3$ raide a. Išskaidę skaičių a pirminiais dauginamaisiais, matome, kad pirminių dauginamųjų laipsnių rodikliai turi dalytis iš 2 (nes a — skaičiaus x kvadratas) ir iš 3 (nes a — skaičiaus y kubas). Bet tada a yra kažkurio skaičiaus šeštasis laipsnis. Kadangi $100 \leqslant a < 10\,000$, tai $a=3^6$; 4^6. Bet $3^6=729$ nėra dviženklio skaičiaus kubas, o $4^6=64^2=16^3$.

Atsakymas: 16 ir 64.



77 pav.

10.2. 1) Sakykime, kad apskritimas (O_2, R) eina per kito apskritimo centrą O_1 (77 pav., *a*). Trikampiai AO_1M_1 ir AO_2M_2 — statieji lygiašoniai: $AM_1=M_1O_1=r$, $AM_2=M_2O_2=R$, $AO_1=r\sqrt{2}$, $AO_2=R\sqrt{2}$. Be to, $AO_2=AO_1+O_1O_2$, t. y. $AO_2=r\sqrt{2}+R$. Vadinasi,

$$R\sqrt{2}=r\sqrt{2}+R \text{ ir}$$

$$\frac{r}{R}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

2) Sakykime, kad apskritimas (O_1, r) eina per kito apskritimo centrą O_2 (77 pav., *b*). Tada $AO_2=AO_1+O_1O_2$, t. y. $R\sqrt{2}=r\sqrt{2}+$ $+r$. Vadinasi,

$$\frac{r}{R}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=2-\sqrt{2}.$$

11.1. Žinome, kad natūraliojo skaičiaus kvadratas gali baigtis tik skaitmenimis 0, 1, 4, 5, 6, 9. Jo paskutiniai skaitmenys negali būti 11, 55, 99, nes nelyginių skaičių kvadratų priešpaskutinis skaitmuo visada lyginis (žr. IX—X klasės 9.1 uždavinį). Jei natūraliojo skaičiaus kvadratas baigtųsi skaitmenimis 66, tai tas natūralusis skaičius būtų lyginis ir jo kvadratas dalytųsi iš 4. Bet taip negali būti, nes 66 iš 4 nesidalija.

11.2. Nubrėžkime apskritimą, homotetišką duotajam. Homotetijos centras — taškas M, o homotetijos koeficientas — nurodytas santykis (su priešingu ženklu).

Jeigu apskritimas kerta duotą apskritimą dviejuose taškuose, tai jie bus dviejų ieškomų stygų galai.

Jeigu apskritimai liečiasi, tai uždavinys turi vieną sprendinį, jeigu jie nesikerta, uždavinys sprendinių neturi.

12.1. Remsimės dalumo iš 9 požymiu. Ieškomasis skaičius gali turėti tik vieną arba du skaitmenis 3.

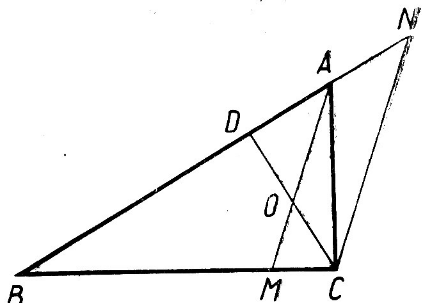
Kai ieškomas skaičius turi du skaitmenis 3, tai kiti du skaitmenys turi būti 1 ir 2. Tokių skaičių yra 12, nes skaitmuo 1 gali užimti vieną iš 4 vietų, o skaitmuo 2 — vieną iš 3 likusių.

Kai ieškomas skaičius turi vieną skaitmenį 3, tai kiti trys, aišku, yra skaitmenys 2. Tokių skaičių keturi: 3222, 2322, 2232, 2223.

Iš viso yra 16 sąlygą tenkinančių keturženklių skaičių.

12.2. Sakykime, kad O — aukšnės CD vidurys (78 pav.). Nubrėžiame tiesę CN, lygiagrečią tiesei MA, taškas N priklauso tiesei AB. Tada iš $DO=OC$ išplaukia, kad $DA=AN$. Pritaikę proporcingų atkarpų teoremą, gauname:

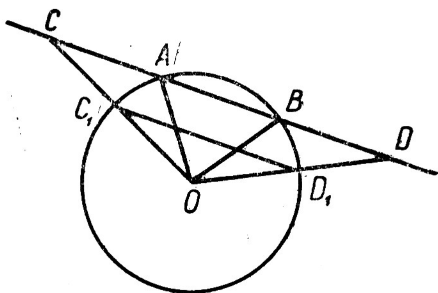
$$\frac{CM}{MB}=\frac{NA}{AB}=\frac{AD}{AB}=\frac{AD\cdot AB}{AB^2}=$$
$$=\frac{AC^2}{AB^2}=\cos^2 A.$$



78 pav.

13.1. $\overline{abcabc}$ išraiškos skaičius dalus iš 11. Mat $\overline{abcabc}=\overline{abc}\times$ $\times 1000+\overline{abc}=1001\cdot\overline{abc}$, o 1001 dalijasi iš 11. Todėl skaičių $\overline{2x1}$ parašę 1990 kartų, gauname skaičiaus 11 kartotinį, o kad minimas skaičius dalytųsi iš 11, būtina, jog pats skaičius $\overline{2x1}$ dalytųsi iš 11. Iš čia gauname, kad $x=3$.

13.2. Per spindulių galus A ir B nubrėžkite tiesę, joje atidėkite atkarpas AC ir BD, lygias atkarpai AB. Homotetija, kurios centras yra apskritimo centras, atvaizduoja atkarpą CD į ieškomą stygą C_1D_1 (79 pav.).

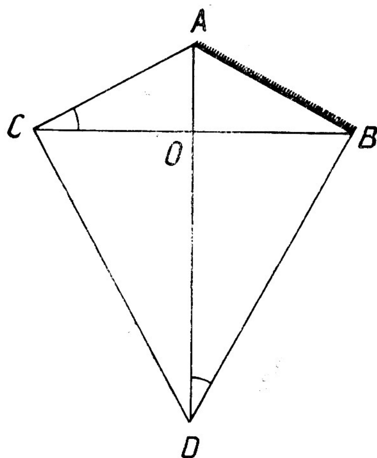


79 pav.

14.1. Trimis skirtingais skaitmenimis a, b, c galima parašyti $3\cdot 3\cdot 3=27$ triženklius skaičius. 9 kartus jų paskutinis skaitmuo bus a, 9 kartus — b ir 9 kartus — c. Todėl 27 skaičių paskutinių skaitmenų suma bus lygi $9(a+b+c)$. Šitaip apskaičiuojama ir skaitmenų, parašytų dešimčių ir šimtų skyriuose, sumos. Tada visų skaičių suma lygi $900(a+b+c)+90(a+b+c)+9(a+b+c)=$ $=999(a+b+c)$.

14.2. 80 paveiksle $CD=300$ m, $\angle ACB=\angle ADB=30°$. Jei $AO=x$ m, $BO=y$ m, tai trikampio COD statinių ilgiai lygūs $x\sqrt{3}$ m ir $y\sqrt{3}$ m; $\triangle BOA \sim \triangle COD$. Iš čia $AB=100\sqrt{3}\approx 173$ (m).

Atsakymas: ≈ 173 m.



80 pav.

15.1. Kad egzistuotų dvi skirtingos šaknys, turi būti $D>0$, t. y. $b<9$.

Sakykime, kad x_1 ir x_2 — lygties šaknys ir $x_1=2x_2$. Iš Vieto teoremos žinome, kad $x_1 \cdot x_2=b$, $x_1+x_2=6$. Taigi $2x_2+x_2=6$, $x_2=2$, $x_1=4$, $b=4\cdot 2=8$.

Atsakymas: $b=8$.

15.2. Iš trikampių MAD ir MQB bei MPD ir MAB homotetiškumo gauname:

$$\frac{MA}{MQ}=\frac{MD}{MB}, \quad (1)$$

$$\frac{MD}{MB}=\frac{MP}{MA}. \quad (2)$$

Iš (1) ir (2) lygybės išplaukia, kad

$$MA^2=MP\cdot MQ.$$

16.1.

$$9x^3-4x=9x+6,$$
$$x(3x-2)(3x+2)=3(3x+2),$$
$$(3x+2)(3x^2-2x-3)=0,$$
$$3x+2=0 \text{ arba } 3x^2-2x-3=0,$$
$$x_1=-\frac{2}{3}, \ x_2=\frac{1-\sqrt{10}}{3}, \ x_3=\frac{1+\sqrt{10}}{3}.$$

Atsakymas: $-\frac{2}{3}$, $\frac{1-\sqrt{10}}{3}$, $\frac{1+\sqrt{10}}{3}$.

16.2. BD — kampo ABC pusiaukampinė. Trikampiai CBD ir BAC panašūs. Todėl

$$\frac{a}{CD}=\frac{c}{BD}=\frac{b}{a}, \ CD=\frac{a^2}{b}, \ BD=\frac{ac}{b}.$$

Trikampio ABD kampai prie pagrindo lygūs, todėl $BD=AD=b-CD$, tuomet

$$\frac{ac}{b}=b-\frac{a^2}{b},$$
$$b^2-a^2=ac.$$

17.1. $\frac{3y^2-4xy}{x^2+y^2}=\frac{(2y-x)^2}{x^2+y^2}-1=4-\frac{(y+2x)^2}{x^2+y^2}$.

Šita trupmena įgyja didžiausią reikšmę 4, kai $y=-2x$ $(x\neq 0)$, o mažiausia reikšmė lygi -1, kai $y=\frac{1}{2}x$ $(x\neq 0)$.

17.2. Remdamiesi trikampių ABC ir BDC (81 pav.) panašumu rašome:

$$\frac{a}{CD}=\frac{b}{a}=\frac{c}{BD},$$

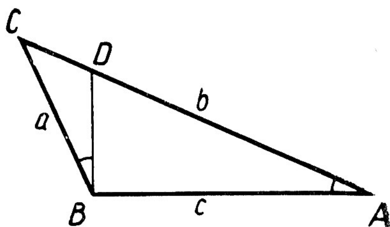
$$CD=\frac{a^2}{b},\quad BD=\frac{ac}{b},$$

$$AD=AC-CD=\frac{b^2-a^2}{b}.$$

Bet $AD^2=BD^2+AB^2$, taigi

$(b^2-a^2)^2=c^2(a^2+b^2)$,

$b^2-a^2=c\sqrt{a^2+b^2}$.



81 pav.

18.1. Sakykime, kad $10x+y$ — dviženklis skaičius. Tada, parašęs nulį, Rimas gavo $100x+y$. Nagrinėjamas dalmuo toks:

$$k=\frac{100x+y}{10x+y}.$$

Iš čia: $10x(10-k)=y(k-1)$. (1)

Kadangi (1) lygybės dešinioji pusė turi dalytis iš 5, nagrinėjame tris atvejus:

1) $y=0$. Kadangi $x\neq 0$, tai $k=10$, o tokiu dviženkliu skaičiumi gali būti 10, 20, 30, ..., 90.

2) $y=5$. Tada $2x(10-k)=k-1$,

$$k(2x+1)=20x+1,$$

$$k=\frac{20x+1}{2x+1}=10-\frac{9}{2x+1}.$$

Vadinasi,

$$2x+1=3 \text{ arba } 2x+1=9. \qquad (2)$$

Tuomet $k=7$ arba $k=9$. Įsitikinsime, kad tokie dviženkliai skaičiai yra. Iš (2) lygčių gauname: $x=1$ arba $x=4$. Tada dviženkliai skaičiai yra 15 ir 45. Be to, $105:15=7$; $405:45=9$.

3) $k=6$. Iš (1) lygybės $k\leqslant 10$, todėl $40x=5y$, arba $y=8x$. Iš čia: $x=1$, $y=8$. Tas dviženklis skaičius yra 18 ir $108:18=6$.

Taigi didžiausia k reikšmė 10, o mažiausia 6.

Atsakymas: didžiausią 10, mažiausią 6.

a) b) c) 82 pav.

18.2. 82 paveiksle parodytas sprendimas, kai $n=6, 7, 8$. Nubrėžę vieno trikampio vidurines linijas, trimis padidiname panašiųjų trikampių skaičių. Todėl galima gauti $3k$, $3k+1$, $3k+2$ trikampių (kai $k>1$).

19.1. Tarkime priešingai: pirminių skaičių yra baigtinis skaičius. Tada tarp jų yra didžiausias. Pažymėkime jį raide p. Visų pirminių skaičių sandaugą, padidintą vienetu, pažymėkime raide Q ($Q=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot\ldots\cdot p+1$). Skaičius Q nesidalija nė iš vieno pirminio skaičiaus (nes gauname liekaną, lygią 1). Vadinasi, Q yra pirminis skaičius. Bet $Q>p$, taigi radome pirminį skaičių, didesnį už p. Gavome prieštarą, todėl prielaida yra neteisinga.

Taigi pirminių skaičių aibė yra begalinė.

19.2. Nagrinėkime trikampį AMD, kurio D — kampo ACB pusiaukampinės susikirtimo su apskritimu AMB antrasis taškas (83 pav.). Pastebime, kad $\angle AMD=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)$, $\angle ADM=\angle ABM=\frac{1}{2}\angle B$. Iš čia $\angle AMD+\angle ADM=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C)=90°$, to-

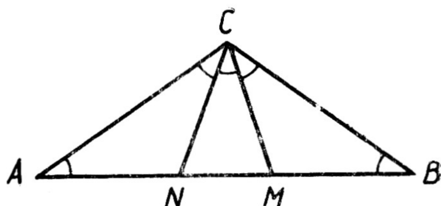
83 pav.

dėl $\angle DAM = 90°$ ir atkarpa DM yra apskritimo AMB skersmuo. Vadinasi, apskritimo AMB centras N yra kampo ACB pusiaukampinėje CD.

20.1. Natūralusis skaičius arba dalus iš 5, arba padalijus jį iš 5 gaunama viena iš keturių liekanų: 1, 2, 3, 4. Jeigu imsime penkis skaičius ($n=5$) arba jų mažiau, tai vienodų liekanų galime negauti (jos gali būti 0, 1, 2, 3, 4). Kai imsime šešis skaičius ($n=6$), visada bent dvi liekanos sutaps ir jas atitinkančių skaičių skirtumas dalysis iš 5.

Atsakymas: 6.

20.2. Nubrėžiame spindulius CN ir CM: $\angle ACN = \angle NCM = 36°$ (84 pav.). Sakykime, kad $AC = CB = b$, $AN = x$, $AB = c$. Kadangi trikampiai ACN ir ACB panašūs, tai



84 pav.

$$\frac{x}{b} = \frac{b}{c}. \qquad (1)$$

Iš lygiašonio trikampio BCN išplaukia, kad:

$$b = c - x. \qquad (2)$$

Iš (2) lygybės išreiškę x, tą išraišką įrašome į (1) lygybę. Gauname:

$\frac{c-b}{b} = \frac{b}{c}$. Ją pakeičiame jai ekvivalenčia lygybe:

$$\left(\frac{c}{b}\right)^2 - \frac{c}{b} - 1 = 0.$$

Iš čia

$$\frac{c}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ arba } \frac{c}{b} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

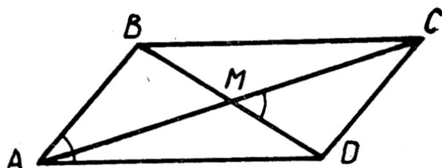
Kadangi $c>0$, $b>0$, tai $\frac{c}{b}>0$. Todėl $\frac{c}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

21.1. Pasirinkime n tokios išraiškos skaičių: 1, 11, 111, ..., 111...1. Jei kuris nors jų dalus iš n, tai, prie jo prirašę vieną ar kelis nulius, gausime norimą skaičių.

Jei visi pasirinkti skaičiai dalijasi iš n tik su liekanomis, tai dvi iš jų yra vienodos, nes skirtingų liekanų gali būti tik $n-1$. Vadinasi, dviejų skaičių, kurių liekanos vienodos, skirtumas dalus iš n. Antra vertus, tas skirtumas yra sąlygoje nurodytos išraiškos skaičius.

Suprantama, kad skaičiaus gale prirašydami nulius galime gauti be galo daug sąlygą tenkinančių skaičių.

21.2. Sakykime, kad atkarpos AC ir BD susikerta taške M (85 pav.). Iš trikampių ACD ir AMD panašumo (turi bendrą kampą CAD ir $\frac{AC}{AD}=\frac{AD}{AM}=\sqrt{2}$) išplaukia, kad $\angle ADC=\angle AMD$. Tada $\angle CMD=\angle BAD$.



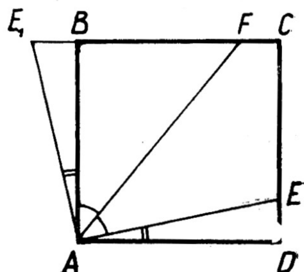
85 pav.

22.1. Ieškomą dviženklį skaičių $\overline{xy}$ pažymėkime raide a. Iš duotos lygties gauname: a^2-a dalijasi iš 100, nes turinio ir atėminio paskutiniai du skaitmenys yra vienodi. Vadinasi, $a^2-a=a(a-1)$ dalijasi ir iš 25. Bet a ir $a-1$ tarpusavyje pirminiai; jeigu vienas dalijasi iš 5, tai kitas — ne. Todėl arba a, arba $a-1$ dalijasi iš 25. Tuomet

a	25	50	75	26	51	76
$a-1$	24	49	74	25	50	75

Mus domina tik tokia skaičių pora, kurios vienas skaičius dalijasi iš 25, o kitas — iš 4. Vadinasi, $a=25$ arba $a=76$. Bet $25^2=625$ — triženklis, o $76^2=5776$ tenkina sąlygą. Taigi $x=7$, $y=6$.

22.2. Posūkiu apie tašką A 90° kampu trikampis ADE atvaizduojamas į trikampį ABE_1 (86 pav.). Sakykime, kad $\angle BAF=\alpha$, tada $\angle FAE=\alpha$, $\angle BFA=90°-\alpha$. Bet $\angle EAE_1=90°$, todėl $\angle E_1AF=90°-\alpha$. Vadinasi, trikampis AE_1F lygiašonis ($AE_1=E_1F$). Remdamiesi posūkio savybėmis rašome $AE=AE_1$, $DE=BE_1$. Tada $AE=AE_1=FE_1=FB+BE_1=FB+DE$. Taigi $AE=BF+DE$.



86 pav.

23.1. Duotos lygybės abi puses padauginame iš $a+b+c$:

$$a+b+c=\frac{a(a+b+c)}{b+c}+\frac{b(a+b+c)}{c+a}+\frac{c(a+b+c)}{a+b}=$$

$$=\frac{a^2}{b+c}+a+\frac{b^2}{c+a}+b+\frac{c^2}{a+b}+c.$$

Iš čia gauname, kad $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0$.

23.2. N u r o d y m a s. Posūkis, kurio centras M_1, atkarpos AB vidurio tašką S atvaizduoja į atkarpos A_1B_1 vidurio tašką S_1. Vadinasi, M_1 priklauso atkarpos SS_1 vidurio statmeniui. Analogiškai ir M_2 priklauso atkarpos SS_1 vidurio statmeniui.

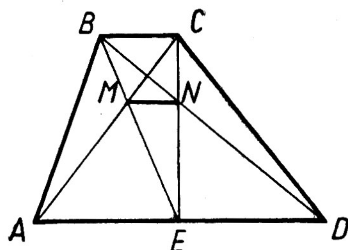
24.1. Pirmą sistemos lygtį padauginę iš 3 ir iš gautos lygties atėmę antrą, gauname $2x+2y=0$. Tuomet $y=-x$ ir $z=-\frac{11x}{2}$. Sistemos sprendinius galime užrašyti taip: $x=-2t$, $y=2t$, $z=11t$; čia t — sveikasis skaičius.

24.2. Sakykime, kad $AD=a$, $BC=b$ — trapecijos $ABCD$ (87 pav.) pagrindų ilgiai. Remdamiesi trikampių AME ir CMB panašumu rašome:

$$\frac{EM}{MB}=\frac{AE}{BC}=\frac{a}{2b}. \quad (1)$$

Kadangi trikampiai END ir CNB panašūs, tai:

$$\frac{EN}{NC}=\frac{a}{2b}. \quad (2)$$



87 pav.

Remdamiesi proporcingų atkarpų teorema iš (1) ir (2) lygybės gauname, kad tiesės MN ir BC yra lygiagrečios. Vadinasi, trikampiai BEC ir MEN panašūs. Tada

$$\frac{MN}{BC}=\frac{EM}{BE}. \quad (3)$$

Atsižvelgę į tai, kad $BE=EM+MB$, iš (1) ir (3) lygybės gauname:

$$\frac{EM}{EM+MB}=\frac{a}{a+2b} \text{ ir } MN=\frac{ab}{a+2b}.$$

Tarkime, kad $\frac{a}{b}=x$; čia $x>1$.

Tada $MN=\frac{a}{x+2}$.

Funkcija $f(x)=\frac{a}{x+2}$ intervale $(1;\ \infty)$ neturi didžiausios reikšmės. Kai $x \to 1$, tada $MN \to \frac{a}{3}$. Tai rodo, kad lygiagretainio atveju $MN=\frac{a}{3}$.

25.1. Pirmas būdas. Taikome keitinį: $\sqrt{6}=a$. Tada sprendžiamos lygties išraiška yra

$$x^6-(a^2+1)x^2+a=0.$$

Išspręskime ją kaip kvadratinę atžvilgiu a. Jos sprendiniai

$$a_1=x^2,\ a_2=\frac{1-x^4}{x^2}.$$

Duotą lygtį galima parašyti taip:

$$(a-x^2)\left(a-\frac{1-x^4}{x^2}\right)=0.$$

Dabar uždavinys pakeičiamas lygčių $x^2=a$ ir $x^4+ax^2-1=0$ sprendimu.

Iš pirmos lygties gauname:

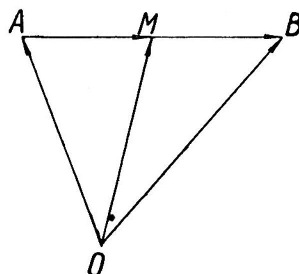
$$x_1=\sqrt[4]{6},\ x_2=-\sqrt[4]{6},$$

iš antros

$$x_3=\sqrt{\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{10}}{2}},\ x_4=-\sqrt{\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{10}}{2}}.$$

Antras būdas. Pažymėję $x^2=y$, gauname lygtį $y^3-7y+\sqrt{6}=0$. Išskaidome: $y^3-7y+\sqrt{6}=y^3+\sqrt{6}y^2-\sqrt{6}y^2-y-6y+\sqrt{6}=(y^3+\sqrt{6}y^2-y)-(\sqrt{6}y^2+6y-\sqrt{6})=y(y^2+\sqrt{6}y-1)-\sqrt{6}(y^2+\sqrt{6}y-1)=(y-\sqrt{6})\cdot(y^2+\sqrt{6}y-1)$. Dabar sprendžiame lygtį $(y-\sqrt{6})(y^2+\sqrt{6}y-1)=0$.

25.2. Iš sąlygos žinome, kad $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$ (88 pav.). Bet $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$ ir $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$. Tada $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$, iš čia: $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.



88 pav.

26.1. Pažymėję kairiąją įrodomos nelygybės pusę raide a, matome, kad

$$a=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-1}{2n}<$$

$$<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}.$$

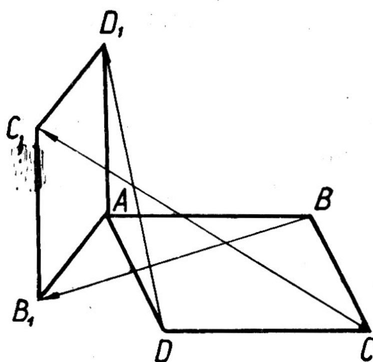
Čia rėmėmės tokiu teiginiu: taisyklingoji trupmena padidėja, padidinus jos skaitiklį ir vardiklį vienetu. (Kad teiginys teisingas, įsitikiname subendravardiklinę trupmenas $\frac{k}{l}$ ir $\frac{k+1}{l+1}$; čia $k\in\boldsymbol{N}$, $l\in\boldsymbol{N}$, $k<l$.)

Gavome:

$$a<\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2n+1},\ \text{arba}\ a<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

26.2. Kadangi $ABCD$ ir $AB_1C_1D_1$ — lygiagretainiai, tai $\vec{AC_1}=\vec{AB_1}+\vec{AD_1}$ ir $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{AD}$ (89 pav.). Atimame antrą lygybę iš pirmos: $\vec{AC_1}-\vec{AC}=\vec{AB_1}-\vec{AB}+\vec{AD_1}-\vec{AD}$. Iš čia $\vec{CC_1}=\vec{BB_1}+\vec{DD_1}$. Vadinasi,

$$CC_1 \leqslant BB_1+DD_1.$$



89 pav.

27.1. Duotą lygtį parašome taip:

$$(x-y)(x+y)=135.$$

Kadangi pagal sąlygą x ir y yra natūralieji skaičiai, tai $x>y$ ir $x-y<x+y$. Vadinasi, 135 reikia išskaidyti į tokius du dauginamuosius, kurių mažesnysis būtų mažesnis už $\sqrt{135}$, arba už 12. Tam iš skaičiaus 135 daliklių 1, 3, 5, 9, 15, 27, 45, 135 išrenkame mažesnius už 12 skaičius: 1, 3, 5, 9.

Gauname lygčių sistemas:

$$\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=135; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=3, \\ x+y=45; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=5, \\ x+y=27; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=9, \\ x+y=15. \end{cases}$$

Išsprendę jas, gauname:

$$\begin{cases} x_1=68, \\ y_1=67; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=24, \\ y_2=21; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=16, \\ y_3=11; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=12, \\ y_4=3. \end{cases}$$

Atsakymas: (68; 67), (24; 21), (16; 11), (12; 3).

27.2. Remiamės trikampio pusiaukampinės savybe:

$$\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{CB}{CA}=\frac{a}{b}.$$

Iš čia: $\frac{BC_1}{BA}=\frac{a}{a+b}$.

Bet $\vec{BC_1}=\vec{CC_1}-\vec{CB}$, $\vec{BA}=\vec{CA}-\vec{CB}$, todėl $\vec{CC_1}-\vec{CB}=\frac{a}{a+b}\cdot(\vec{CA}-\vec{CB})$.

$$\vec{CC_1}=\frac{a}{a+b}\vec{CA}+\frac{b}{a+b}\vec{CB};$$

$$\vec{CC_1}=\frac{a\vec{CA}+b\vec{CB}}{a+b}.$$

28.1. Sakykime, kad x — vienetų skaitmuo, o y — dešimčių skaitmuo. Tada

$$\begin{cases} x^2+y^2=113, \\ (10y+x)+(10x+y)=165; \end{cases}$$

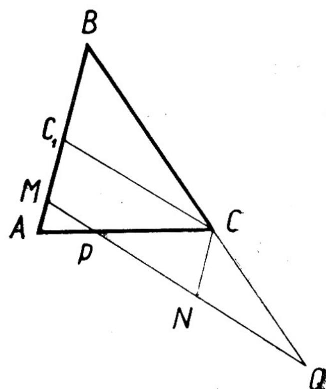
$$\begin{cases} x^2+y^2=113, \\ x+y=15. \end{cases}$$

Atsakymas: 78 arba 87.

28.2. Per trikampio ABC viršūnę C nubrėžiame tiesę CN, lygiagrečią tiesei AB; tiesės CN ir PQ kertasi taške N (90 pav.). Nesunku įsitikinti, kad $\triangle ACC_1 \sim \triangle CPN$ ir $\triangle BCC_1 \sim \sim \triangle CQN$. Todėl

$$\frac{CC_1}{QN}=\frac{CC_1}{NP}.$$

Taigi $QN=NP$ ir $2\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{QM}$.



90 pav.

29.1. Turime:

$$4x^4+12x^3+5x^2-6x-15=(4x^4+12x^3+9x^2)-(4x^2+6x)-15=$$
$$=(2x^2+3x)^2-2(2x^2+3x)-15=(2x^2+3x-5)(2x^2+3x+3).$$

Iš čia gauname, kad duota lygtis turi šaknis $x_1=-2{,}5$, $x_2=1$.

Atsakymas: $-2{,}5$; 1.

29.2. Remiamės stačiųjų trikampių savybėmis:

$$a^2=AC\cdot AB,\quad b^2=BC\cdot BA.$$

Iš čia:

$$\frac{AC}{CB}=\frac{a^2}{b^2}.$$

Kadangi taškas C dalija atkarpą AB santykiu $\frac{a^2}{b^2}$, tai $\overrightarrow{AC}=$ $=\frac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{AB}$. Bet $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, todėl $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=$ $=\frac{a^2}{a^2+b^2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$. Iš čia: $\overrightarrow{OC}=\frac{a^2\overrightarrow{OB}+b^2\overrightarrow{OA}}{a^2+b^2}$.

30.1. Nagrinėjame skirtumą:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqslant 0.$$

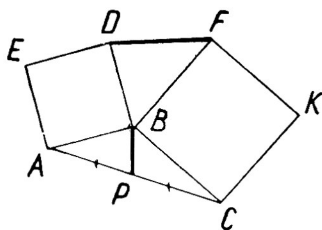
Vadinasi,

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$$

Lygybės ženklas galimas tada ir tik tada, kai $a=b$.

30.2. Iš trikampio ABC:

$$2\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC} \text{ (91 pav.)}.$$



91 pav.

Vektorius $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{BC}$ pasukime 90° kampu apie tašką B pagal laikrodžio rodyklę. Iš to, kad vektorius $\overrightarrow{BA}$ atvaizduojamas į vektorių $\overrightarrow{BD}$ ir vektorius $\overrightarrow{BC}$ — į vektorių $-\overrightarrow{BF}$, išplaukia, jog vektorius $2\overrightarrow{BP}$ atvaizduojamas į vektorių $\overrightarrow{BD}$ ir $\overrightarrow{BF}$ skirtumą, o vektorių $\overrightarrow{BD}$ ir $\overrightarrow{BF}$ skirtumas yra vektorius $\overrightarrow{FD}$. Kadangi posūkiu 90° kampu $2\overrightarrow{BP}$ atvaizduojamas į $\overrightarrow{FD}$, tai $2BP=FD$, o kampas tarp atkarpų FD ir BP lygus 90°.

31.1. $\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\geqslant\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}$, nes $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ ir $\frac{c+d}{2}\geqslant\sqrt{cd}$.

Skaičių $\sqrt{ab}$ ir $\sqrt{cd}$ aritmetinis vidurkis ne mažesnis už jų geometrinį vidurkį:

$$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}\geqslant\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}=\sqrt[4]{abcd}.$$

Vadinasi, $\frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd}$.

Jei teisingas bent vienas sąryšis $a\neq b$, $c\neq d$, $ab\neq cd$, tai nelygybė yra griežta. Lygybė galima tik tada, kai $a=b$, $c=d$, $ab=cd$. Iš čia: $a^2=c^2$; $a=c$. Taigi lygybė galima tada ir tik tada, kai $a=b=c=d$.

31.2. $\vec{a}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC})+(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$, t. y. $\vec{a}$ nepriklauso nuo taško M padėties.

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC})-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{MC}$.

Tarkime, kad $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$, tada $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=$ $=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{CA}$.

Vadinasi, taškas M yra spindulyje AC ir $CM=2CA$.

32.1. Pirmas būdas. Pasinaudokime jau įrodyta nelygybe

$$\frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd}$$

(žr. IX—X klasės 31.1 uždavinį) ir imkime $d=\frac{a+b+c}{3}$. Turime

$$\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4}\geqslant\sqrt[4]{abc\cdot\frac{a+b+c}{3}},$$

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[4]{abc\cdot\frac{a+b+c}{3}}.$$

Abi nelygybės puses pakėlę ketvirtuoju laipsniu, gauname: $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4\geqslant abc\cdot\frac{a+b+c}{3}$, o iš čia $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\geqslant abc$, arba $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$.

Antras būdas. Taikome keitinius $a=x^3$, $b=y^3$, $c=z^3$ ir įrodomą nelygybę pakeičiame tokia:

$\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\geqslant xyz$, arba $x^3+y^3+z^3\geqslant 3xyz$.

Skirtumas lygus $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$ (žr. VII—VIII klasės 56.2 uždavinį), arba $x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}(x+y+z)(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz)=\frac{1}{2}(x+y+z)((x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2)\geqslant 0$. Kadangi $x=\sqrt[3]{a}$, $y=\sqrt[3]{b}$, $z=\sqrt[3]{c}$, tai $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$. Lygybės ženklas galimas tada ir tik tada, kai $a=b=c$.

32.2. $\overrightarrow{A_2C}=\overrightarrow{A_2A}+\overrightarrow{AC}$. Posūkis 90° kampu vektorių $\overrightarrow{A_2A}$ atvaizduoja į vektorių $\overrightarrow{CB}$, vektorių $\overrightarrow{AC}$ — į vektorių $\overrightarrow{BB_2}$, t. y. $\overrightarrow{A_2C}$ atvaizduoja į $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BB_2}=\overrightarrow{CB_2}$. Iš čia $\overrightarrow{A_2C}\perp\overrightarrow{CB_2}$ ir $|\overrightarrow{A_2C}|=|\overrightarrow{CB_2}|$.

33.1. Kadangi $p+(p-1)+(p-2)+\ldots+3+2+1=\frac{p(p+1)}{2}$, o sąlygoje pasakyta, kad reiškinio $\frac{p(p+1)}{2}$ reikšmė yra triženklis skaičius, tai turi būti teisinga nelygybė

$$100\leqslant\frac{p(p+1)}{2}<1000,$$

arba nelygybė

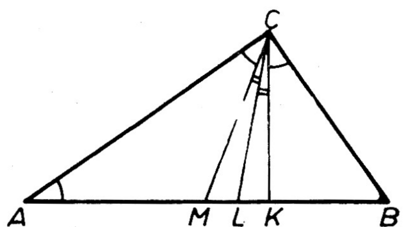
$$200\leqslant p(p+1)<2000.$$

Matome, kad pastaroji nelygybė teisinga tada, kai $14\leqslant p<45$.

Pagal sąlygą reiškinio $\frac{p(p+1)}{2}$ reikšmė yra triženklis skaičius, kurio visi skaitmenys vienodi. Vadinasi, $\frac{p(p+1)}{2}=\overline{aaa}$. Kadangi $\overline{aaa}=100a+10a+a=111a$, tai $\frac{p(p+1)}{2}=111a$, o $p(p+1)=222a=6a\cdot 37$.

Kadangi $14 \leqslant p < 45$ ir $p(p+1)$ dalijasi iš 37, tai $p=36$ arba $p=37$. Patikrinę įsitikiname, kad tinka tik $p=36$.

Atsakymas: 36.



92 pav.

33.2. Trikampio ABC kampas C yra status, CM — pusiaukraštinė ir CK — aukštinė (92 pav.). Pastebime, kad kampo C pusiaukampinė CL yra taip pat ir kampo MCK pusiaukampinė. Iš tikrųjų: kadangi pusiaukraštinė, išvesta į įžambinę, yra lygi jos pusei, tai trikampis AMC — lygiašonis ($AM=MC$) ir $\angle ACM = \angle CAM = 90° - \angle CBK = \angle KCB$.

Iš stačiojo trikampio CMK

$MK = \sqrt{m^2-h^2}$ ir $\dfrac{KL}{ML} = \dfrac{CK}{CM} = \dfrac{h}{m}$ (pusiaukampinės savybė).

Iš proporcijos $\dfrac{KL}{KL+ML} = \dfrac{h}{h+m}$

gauname: $KL = \dfrac{h}{h+m} MK = \dfrac{h}{h+m} \sqrt{m^2-h^2}$.

Tuomet $CL = \sqrt{CK^2+KL^2} = \sqrt{h^2 + \dfrac{h^2}{(h+m)^2}(m^2-h^2)} =$

$= \dfrac{h}{h+m} \sqrt{2m^2+2mh} = h\sqrt{\dfrac{2m}{m+h}}$.

34.1. Seką (a_n) galime apibūdinti formule $a_n = 7n-6$; čia $n \in N$. Kadangi $a_{n+1} - a_n = 7(n+1) - 6 - (7n-6) = 7$, tai seka (a_n) — aritmetinė progresija, kurios $a_1 = 1$, $a_{15} = 7 \cdot 15 - 6 = 99$. Tada

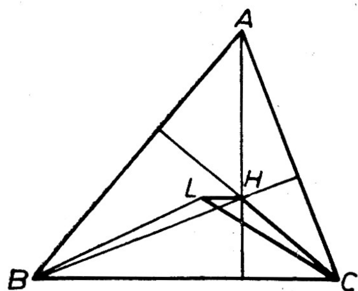
$$S_{15} = \frac{1+99}{2} \cdot 15 = 750.$$

34.2. Skaičiuojame (93 pav.):

$\angle LCH = \angle LCA - \angle HCA = \frac{1}{2} \angle C - (90° - \angle A) = 35° - 30° = 5°$.

$\angle BLC = 180° - 25° - 35° = 120°$,

$\angle BHC = 180° - \angle A = 120°$.



93 pav.

Taškai L ir H priklauso geometrinei vietai taškų, iš kurių atkarpa BC matoma 120° kampu. Vadinasi, keturkampis $BLHC$ įbrėžtinis, todėl $\angle BLC + \angle CLH + \angle BCL + \angle LCH = 180°$. Iš čia $\angle CLH = 180° - 120° - 35° - 5° = 20°$. Tada $\angle LHC = 180° - 20° - 5° = 155°$.

Atsakymas: 5°, 20°, 155°.

35.1. Pirmoje eilutėje parašytos aritmetinės progresijos skirtumą pažymėkime raide x, o skirtumus aritmetinių progresijų, kurių nariai parašyti antrame, trečiame ir ketvirtame stulpelyje,— atitinkamai raidėmis y, z, t. Tada lentelė atrodys taip:

1	$1+x$	$1+2x$	$1+3x$
	$1+x+y$	$1+2x+z$	$1+3x+t$
	$1+x+2y$	$1+2x+2z$	$1+3x+2t$
	$1+x+3y$	$1+2x+3z$	$1+3x+3t$

Iš sąlygos žinome, kad

$$\begin{cases} 1+x+3y=9, \\ 1+2x+2z=6, \\ 1+3x+t=6. \end{cases}$$

Remdamiesi paskutine lentelės eilute sudarome ketvirtąją lygtį:

$$1+2x+3z=\frac{(1+x+3y)+(1+3x+3t)}{2}.$$

Taigi

$$\begin{cases} x+3y=8, \\ 2x+2z=5, \\ 3x+t=5, \\ x+6z-3t=8. \end{cases}$$

Išsprendę šią lygčių sistemą, gauname:

$x=2$, $t=-1$, $z=0{,}5$, $y=2$.

Atsakymas pateiktas lentelėje:

1	3	5	7
4,5	5	5,5	6
8	7	6	5
11,5	9	6,5	4

35.2. O — apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras, M_1 — atkarpų OA ir BC susikirtimo taškas (94 pav.). Įrodysime, kad taškas M_1 sutampa su tašku M.

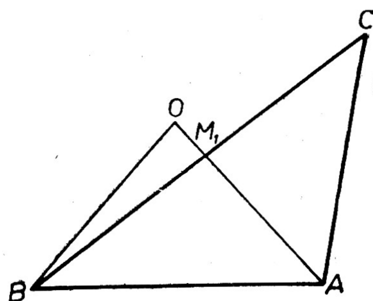
$$\angle AOB=2\angle ACB=84°,$$

$$\angle OAB=\frac{1}{2}(180°-84°)=48°,$$

$$\angle BM_1O=36°+48°=84°.$$

Vadinasi, $BM_1=BO=R$, t. y. M_1 sutampa su tašku M. Ieškomas kampas MAC lygus $180°-(36°+42°)-48°=54°$.

Atsakymas: 54°.



94 pav.

36.1. Sakykime, kad tų skritulių spinduliai yra R, Rq, R^2q. Tada jų apskritimų ilgiai yra $2\pi R$, $2\pi Rq$, $2\pi Rq^2$, o skritulių plotai — πR^2, πR^2q^2, πR^2q^4.

Apskaičiuojame santykius:

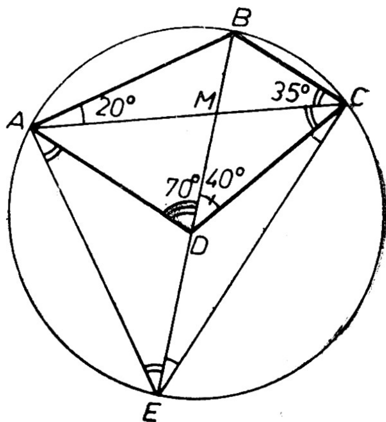
$$\frac{2\pi Rq}{2\pi R}=q \text{ ir } \frac{2\pi Rq^2}{2\pi Rq}=q.$$

Matome, kad apskritimų ilgiai — iš eilės einantys geometrinės progresijos nariai.

$$\frac{\pi R^2q^2}{\pi R^2}=q^2, \quad \frac{\pi R^2q^4}{\pi R^2q^2}=q^2.$$

Taigi skritulių plotai irgi sudaro geometrinę progresiją.

36.2. Apie trikampį ABC apibrėžkime apskritimą ir raide E pažymėkime antrąjį tiesės BD ir apskritimo susikirtimo tašką (95 pav.). $\angle BEC=\angle BAC=20°$. Kadangi trikampio DEC priekampis BDC lygus 40°, kampas DCE lygus 20°. Iš čia $ED=DC$. Analogiškai įrodytume, kad $ED=DA$. Kadangi $DA=DC=$ $=DE$, tai D — nubrėžto apskritimo centras. $\angle DCA=\frac{1}{2}(180°-$ $-110°)=35°$, $\angle BMC=40°+$ $+35°=75°$.



95 pav.

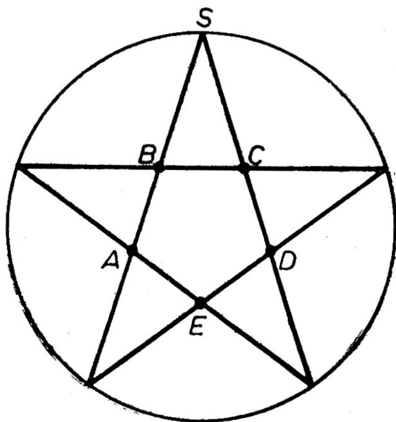
Atsakymas: 75°.

37.1. Kai $q\neq1$, tai $\frac{b_1+b_2+\ldots+b_{n-1}}{b_2+b_3+\ldots+b_n}=\frac{b_1q^{n-1}-b_1}{q-1}:\frac{b_1q^n-b_1q}{q-1}=\frac{1}{q}$.

Kai $q=1$, tai $\frac{b_1+b_2+\ldots+b_{n-1}}{b_2+b_3+\ldots+b_n}=\frac{(n-1)b_1}{(n-1)b_1}=1$.

37.2. Taisyklingojo penkiakampio $ABCDE$ (96 pav.) kiekvienas kampas lygus 108°. Keturkampio $ASDE$ kampų suma 360°. Vadinasi, $\angle S=360°-3\cdot108°=36°$. Penkiakampės žvaigždės visų smailiųjų kampų suma lygi $5\cdot36°=180°$.

Atsakymas: 180°.



96 pav.

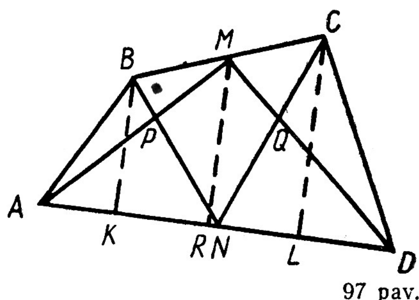
38.1. Duotą nelygybę pakeičiame tokia:

$$2(x-3)^2+2(y+5)^2<3.$$

Ją tenkina tik tokios sveikosios x ir y reikšmės, su kuriomis skliaustuose esantys reiški-

niai arba abu lygūs nuliui, arba vienas jų lygus nuliui, o kitas — vienetui. Gauname šiuos nelygybės sprendinius: (3; −5), (3; −4), (4; −5).

38.2. Nubrėžiame trikampių ABN, AMD, NCD aukštines BK, MR, CL (97 pav.). Kadangi MR yra trapecijos $BCLK$ vidurinė linija, tai $MR = \frac{1}{2}(BK+CL)$.



97 pav.

$$S_{AMD}=\frac{1}{2}MR\cdot AD=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(BK+CL)\cdot(AN+ND)=$$
$$=\frac{1}{4}(BK\cdot AN+CL\cdot AN+BK\cdot ND+CL\cdot ND)=$$
$$=\frac{1}{4}(2BK\cdot AN+2ND\cdot CL)=\frac{1}{2}BK\cdot AN+\frac{1}{2}CL\cdot ND.$$

Įrodėme lygybę
$$S_{AMD}=S_{ABN}+S_{NCD}.$$
Iš lygybės abiejų pusių atėmę $S_{APN}+S_{NQD}$, gauname:
$$S_{MQNP}=S_{ABP}+S_{CDQ}.$$

39.1. $\overline{xy}$ ir $\overline{zt}$ — duoti skaičiai. Pagal uždavinio sąlygą parašome lygybes:
$$x+y+z+t=10x+y, \qquad (1)$$
$$(10x+y)+(10z+t)=(x+y)^2. \qquad (2)$$
Iš (1) lygybės gauname $9x=z+t$, o iš čia $x\leqslant 2$. Jeigu $x=2$, tai $z=t=9$ ir iš (2) lygybės gauname $20+y+99=(y+2)^2$, arba $y^2+3y=115$. Bet su vienaženkliais skaičiais y pastaroji lygybė yra negalima. Vadinasi, $x=1$ ir $z+t=9$.

Dabar iš (2) lygybės gauname:
$$(10+y)+(9+9z)=(y+1)^2,$$
$$y^2+y=9(z+2).$$
Darome išvadą, kad sandauga $y(y+1)$ dalijasi iš 9. Kadangi y ir $y+1$ neturi bendrų dauginamųjų, tai arba y, arba $y+1$ dalijasi iš 9. Vadinasi, $y_1=9$, $y_2=8$, tuomet $z_1=8$, $z_2=6$ ir $t_1=1$, $t_2=3$. Uždavinio sprendiniai yra dvi poros dviženklių skaičių: (19; 81) ir (18; 63).

39.2. Tas keturkampis nebūtinai turi būti lygiagretainis. Tuo įsitikiname išnagrinėję iškiląjį keturkampį, kurio įstrižainė BD dalija įstrižainę AC pusiau. Taškas M — atkarpos BD vidurys.

40.1. Sąlygą tenkinančio triženklio skaičiaus pirmuosius skaitmenis pažymėkime raidėmis a ir b. Aišku, kad $ab<10$. Kai $a=1$, egzistuoja 10 reikšmių b, su kuriomis ši nelygybė teisinga.

Kai $a=2$, 3, 4, galimas b reikšmių skaičius atitinkamai lygus 5, 4, 3.

Imant a nuo 5 iki 9, galima rasti po dvi b reikšmes.

Taigi uždavinio sąlygą tenkina $10+5+4+3+5\cdot 2=32$ skaičiai.

Atsakymas: 32.

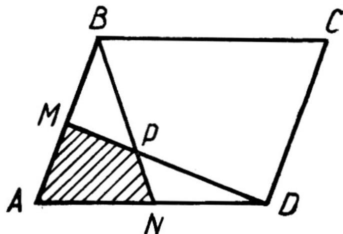
40.2. $S_{ADM}=S_{ANB}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$, todėl $S_{PND}=S_{MPB}$ (98 pav.). Bet $S_{PND}=S_{ANP}$ ir $S_{MPB}=S_{AMP}$. Sudėję panariui šias dvi lygybes, gauname:

$$S_{AMPN}=\frac{2}{3}S_{AMD}.$$

Taigi $S_{AMPN}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}S_{ABCD}=$

$=\frac{1}{6}S_{ABCD}.$

Atsakymas: $\frac{1}{6}$.



98 pav.

41.1. Nagrinėkime kvadratinį trinarį $f(x)=x^2+bx+ac$. Jo vyriausiojo nario koeficientas teigiamas ir, kaip žinome, iš sąlygos $f(a)<0$. Vadinasi, trinaris turi skirtingas šaknis, o taip yra tik tada, kai jo diskriminantas teigiamas. $D=b^2-4ac>0$, iš čia $b^2>$ $>4ac$.

41.2. Nubrėžiame įstrižainę AC (99 pav.). Iš sąlygos išplaukia, kad $S_{AND}=\frac{1}{k}S_{ACD}$, $S_{CBM}=\frac{1}{k}S_{ABC}$. Šias lygybes panariui sudedame:

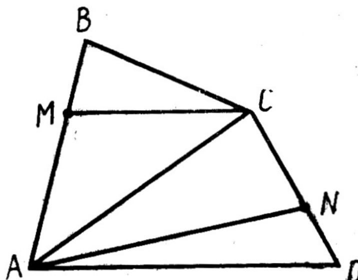
$$S_{AND}+S_{CBM}=\frac{1}{k}S_{ABCD}.$$

Randame:

$S_{AMCN}=S_{ABCD}-(S_{AND}+S_{CBM})=$

$=S_{ABCD}-\frac{1}{k}S_{ABCD}=\frac{k-1}{k}S_{ABCD}.$

Atsakymas: $\frac{k-1}{k}$.

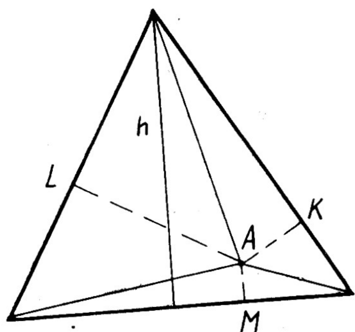


99 pav.

42.1. Duotą nelygybę galime pakeisti tokia: $n^4>(n+1)^3$. Kadangi $n^4-(n+1)^3=n^4-n^3-3n^2-3n-1=n^3(n-3)+2n^2(n-3)+3n(n-$ $-3)+6(n-3)+17>0$, tai nelygybė $n^4>(n+1)^3$ ir duota nelygybė yra teisingos.

42.2. Nesvarbu, kurioje sklypo vietoje bus pastatytas namas: visų kelių ilgių suma yra pastovi ir lygi trikampio aukštinei. Įrodysime tai.

Sakykime, kad lygiakraščio trikampio kraštinė lygi a, o aukštinė h (100 pav.).



100 pav.

Trikampio viduje pažymėkime tašką A ir iš jo nubrėžkime statmenis AK, AL, AM trikampio kraštinėms. Tašką A sujunkime su trikampio viršūnėmis. Kiekvieno tų trijų trikampių plotas lygus:

$\frac{AK \cdot a}{2}$, $\frac{AM \cdot a}{2}$, $\frac{AL \cdot a}{2}$.

Duoto trikampio plotas lygus $\frac{ah}{2}$. Gauname tokią lygybę:

$$\frac{AK \cdot a}{2} + \frac{AM \cdot a}{2} + \frac{AL \cdot a}{2} = \frac{ah}{2};$$

$$\frac{a}{2}(AK + AM + AL) = \frac{a}{2} \cdot h.$$

Iš čia: $AK + AM + AL = h$.

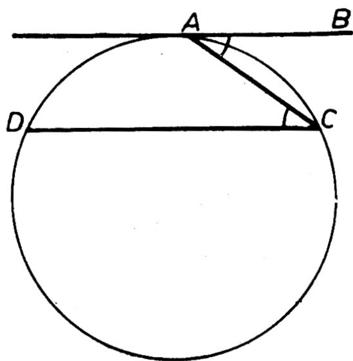
A t s a k y m a s: bet kurioje sklypo vietoje.

43.1. Skaičiuojame skirtumą:

$$(a^2 + ab + b^2) - (3a + 3b - 3) = (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + ab - a - b + 1 = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (a-1)(b-1) = \left((a-1) + \frac{1}{2}(b-1)\right)^2 + \frac{3}{4}(b-1)^2 \geqslant 0.$$

Iš čia matome, kad duota nelygybė teisinga su visomis a ir b reikšmėmis, išskyrus $a = b = 1$.

43.2. Kampą BAC sudaro liestinė AB ir styga AC (101 pav.). Per tašką C nubrėžkime $CD \| AB$. Įbrėžtinio kampo ACD laipsninis matas lygus lanko AD laipsninio mato pusei. Bet lankai AD ir AC lygūs, nes jie yra tarp liestinės ir jai lygiagrečios stygos. Vadinasi, kampo ACD laipsninis matas lygus lanko AC laipsninio mato pusei. Kadangi $\angle BAC = \angle ACD$, tai ir kampo BAC laipsninis matas lygus lanko AC laipsninio mato pusei.



101 pav.

44.1. Į duotąją lygybę įrašę $x=2$ ir $x=\frac{1}{2}$, turime $f(2)+3f\left(\frac{1}{2}\right)=4$, $f\left(\frac{1}{2}\right)+3f(2)=\frac{1}{4}$. Dabar iš pirmosios lygybės atimame antrąją, padaugintą iš 3, ir gauname $f(2)=-\frac{13}{32}$.

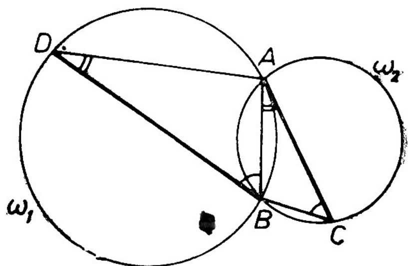
A t s a k y m a s: $-\frac{13}{32}$.

44.2. 1) Nubrėžę stygą AB, gauname (102 pav.): $\angle ACB=\angle ABD$, $\angle BAC=\angle ADB$, nes kiekvieno jų laipsninis matas lygus lanko AB laipsninio mato pusei. Tuomet tretieji trikampių ABC ir DAB kampai taip pat lygūs, t. y. $\angle CBA=\angle BAD$. Iš čia gauname, kad $AD\|BC$.

2) Trikampiai ABC ir DAB panašūs kaip turintys atitinkamai lygius kampus, todėl:

$AB:BC=AD:AB$

ir $AB^2=AD\cdot BC$.



102 pav.

45.1. Taikome keitinį: $x^2+3x-4=u$, $2x^2-5x+3=v$, tuomet $3x^2-2x-1=u+v$. Gauname lygtį $u^3+v^3=(u+v)^3$, o iš čia

$$3uv(u+v)=0.$$

$x^2+3x-4=0$ arba $2x^2-5x+3=0$, arba $3x^2-2x-1=0$, kurių skirtingos šaknys yra tokios:

$$x_1=-4,\ x_2=1,\ x_3=-\frac{1}{3},\ x_4=1{,}5.$$

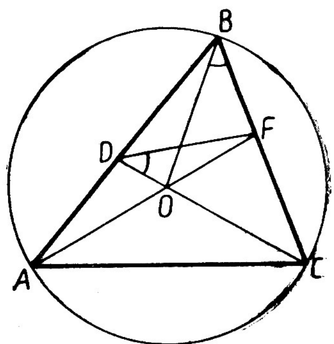
A t s a k y m a s: -4; $-\frac{1}{3}$; 1; 1,5.

45.2. Pažymėkime atkarpų CD ir AF susikirtimo tašką raide O (103 pav.). Gausime $\angle AOC=120°$, $\angle ABC=60°$ ir $OA=OC$ (nes $\angle OAC=\angle OCA=30°$). Vadinasi, O — apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras. Kadangi $\angle DOF+\angle DBF=120°+60°=180°$, tai keturkampis $ODBF$ įbrėžtinis. Taigi

$$\angle BOC=2\angle BAC=100°,$$
$$\angle OBC=\angle OCB=40°.$$
$$\angle CDF=\angle OBF=40°$$

(kaip įbrėžtiniai, kurie remiasi į tą patį lanką).

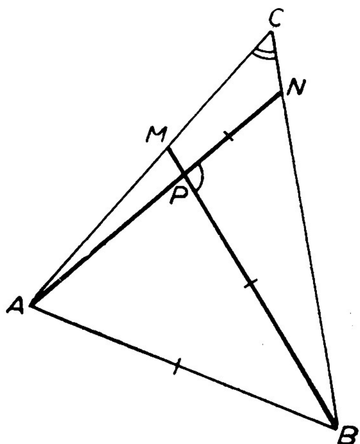
A t s a k y m a s: 40°.



103 pav.

46.1. Akivaizdu, kad antro dauginamojo paskutinis skaitmuo yra 8, todėl pirmos dalinės sandaugos priešpaskutinis skaitmuo lygus 1. Bet tuomet antros dalinės sandaugos paskutinis skaitmuo būtų tik 3, o antro dauginamojo pirmas skaitmuo — 9. Dabar pastebime, kad pirmą dauginamąjį padauginę iš 8, dalinėje sandaugoje gavome daugiau skaitmenų, negu jį padauginę iš 9. Ta prieštara rodo, kad pateiktame pavyzdyje yra klaida.

46.2. Kadangi trikampiai ABM ir BAN lygiašoniai (104 pav.), tai $\angle MBA = 180° - 2\angle A$ ir $\angle NAB = 180° - 2\angle B$. Tuomet $\angle APM = 180° - 2\angle A + 180° - 2\angle B = 360° - (2\angle A + 2\angle B) = 360° - (360° - 2\angle C) = 2\angle C$.



104 pav.

47.1. Iš viso yra 6 trijų kortelių išdėliojimo vienoje eilėje būdai. Jeigu trečioje kortelėje užrašytą skaičių pažymėtume $\overline{xy}$, tai sudėties pavyzdį galėtume užrašyti taip:

$$\begin{array}{r} 2\,3\,7\,9\,x\,y \\ 2\,3\,x\,y\,7\,9 \\ +\;7\,9\,2\,3\,x\,y \\ 7\,9\,x\,y\,2\,3 \\ x\,y\,2\,3\,7\,9 \\ x\,y\,7\,9\,2\,3 \\ \hline 2\,9\,8\,9\,8\,9\,6. \end{array}$$

Sumą, gautą sudėjus skaičius, kuriuos sudaro tik pirmojo ir antrojo skyriaus skaitmenys, pažymėkime a. Tuomet

$$a = 2(23 + 79 + \overline{xy}). \qquad (1)$$

Kadangi tie patys skaičiai 23; 79; $\overline{xy}$ po du kartus parašyti trečiajame ir ketvirtajame bei penktajame ir šeštajame skyriuose, tai atitinkamos sumos lygios $a \cdot 100$ ir $a \cdot 10\,000$. Pagal sąlygą:

$$a + 100a + 10\,000a = 2\,989\,896.$$

Iš čia $a = 296$, o iš (1) lygybės $\overline{xy} = 46$.

A t s a k y m a s: 46.

47.2. Iš sąlygos žinome, kad $\frac{a}{R} = \frac{b+c}{\sqrt{bc}}$, arba $\frac{a}{2R} = \frac{\frac{b+c}{2}}{\sqrt{bc}} \geqslant 1$ (žr. IX—X klasės 30.1 uždavinį). Iš čia: $a = 2R$, $b = c$.

Vadinasi, trikampis ABC status ($\angle A = 90°$) ir lygiašonis ($b = c$).

48.1. $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^2=8+2=10.$

$\left(2\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2=4(3-\sqrt{5})=12-4\sqrt{5}=(\sqrt{10}-\sqrt{2})^2.$

Tuomet

$$\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}=\sqrt{10};$$

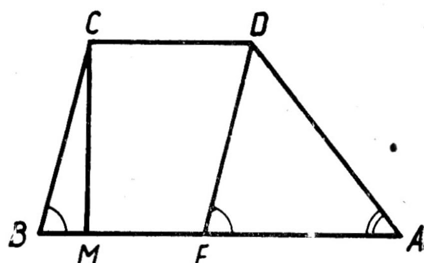
$2\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{10}-\sqrt{2}$, o pateiktas reiškinys lygus $\sqrt{2}$.

A t s a k y m a s: $\sqrt{2}$.

48.2. 105 paveiksle $DE\|BC$, $CM\perp AB$. Pritaikę sinusų teoremą trikampiui ADE, gauname:

$$\frac{DE}{\sin\beta}=\frac{EA}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$DE=\frac{(a-c)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$



105 pav.

Iš trikampio BCM:

$$\sin\alpha=\frac{CM}{CB},$$

$$CM=\frac{(a-c)\sin\beta\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$S=\frac{a+c}{2}\cdot\frac{(a-c)\sin\beta\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{(a^2-c^2)\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}.$$

49.1. Ieškomus skaičius pažymėję raidėmis x ir y, sp ndžiame lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x-y=48, \\ \frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}=18; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=48, \\ x+y-2\sqrt{xy}=36; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=48, \\ (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=36; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=48, \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=6 \end{cases}$$

arba $\begin{cases} (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=48, \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=-6. \end{cases}$

Kadangi $x>y$, tai $\sqrt{x}-\sqrt{y}>0$ ir $\sqrt{x}-\sqrt{y}=6$.

Gauname $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=6, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8. \end{cases}$ Iš čia $x=49$, $y=1$.

A t s a k y m a s: 49; 1.

49.2. Taikome formulę $S=\frac{1}{2}ab\sin C$:

$$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{4}(a^2+b^2).$$

Iš čia:

$$(a-b)^2+2ab(1-\sin C)=0.$$

Paskutinė lygybė galima tada ir tik tada, kai

$$\begin{cases} a-b=0, \\ 1-\sin C=0. \end{cases}$$

Vadinasi, $\angle C=90°$, $\angle A=\angle B=45°$.

50.1. Sakykime, kad $\sqrt{2}+\sqrt{3}=a$; čia $a\in\boldsymbol{Q}$ ($\boldsymbol{Q}$ — racionaliųjų skaičių aibė). Tada $a^2=5+2\sqrt{6}$, o $\sqrt{6}=\frac{a^2-5}{2}$.

Kadangi $a\in\boldsymbol{Q}$, tai ir $(a^2-5)\in\boldsymbol{Q}$. Vadinasi, $\sqrt{6}\in\boldsymbol{Q}$, o tai neteisinga. Ši prieštara rodo, kad $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ nėra racionalusis skaičius.

P a s t a b a. Įrodyti, kad $\sqrt{6}$ yra iracionalusis skaičius, galima panašiai, kaip mokykliniame vadovėlyje įrodomas skaičiaus $\sqrt{2}$ iracionalumas.

50.2. Sakykime, kad S_1 ir S_2 — tų trikampių plotai. Pritaikome trikampio ploto formulę:

$$S_1=\frac{1}{2}a_1b_1\sin\alpha,$$

$$S_2=\frac{1}{2}a_2b_2\sin\beta=\frac{1}{2}a_2b_2\sin(180°-\alpha)=\frac{1}{2}a_2b_2\sin\alpha.$$

Taigi

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{a_1b_1}{a_2b_2}.$$

51.1. Pažymėkime duotą skaičių raide a ir sakykime, kad jis yra kelių dėmenų suma:

$$a=a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

Tada

$$a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3=(a_1^3-a_1)+(a_2^3-a_2)+\ldots+(a_n^3-a_n)+a.$$

Kiekvienas skirtumas $n^3-n=(n-1)n(n+1)$ dalijasi iš 6 (kaip trijų iš eilės einančių natūraliųjų skaičių sandauga). Todėl liekana, gauta padalijus dėmenų kubų sumą iš 6, sutampa su paties skaičiaus a dalybos iš 6 liekana. Bet a — nelyginis skaičius, dalus iš 3, t. y. $a=3(2k+1)=6k+3$, taigi ieškoma liekana lygi 3.

51.2. Pažymėkime $AK=a$, tada $KF=\frac{a}{3}$, $AL=LD=b$, $CL=c$, $\angle KLA=\alpha$, $\angle KAL=x$. Iš trikampio AKL pagal sinusų teoremą $\sin x=\frac{c\sin\alpha}{2a}$. Keturkampio $KLDF$ plotas lygus trikampių AFD ir AKL plotų skirtumui. Atsižvelgę į tai, kad $S_{ABC}=2S_{ABL}$, apskaičiuojame ieškomą plotų santykį:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{KLDF}}=bc\sin\alpha:\frac{5}{12}bc\sin\alpha=\frac{12}{5}=2{,}4.$$

52.1. Kadangi kvadratinio trinario $x^2+\sqrt{2}x+2$ diskriminantas neigiamas, o vyriausiojo nario koeficientas teigiamas, tai trinaris teigiamas su visomis x reikšmėmis. Dabar aišku, kad duota lygtis neturi realių šaknų.

52.2. Sakykime, kad $AB=c$, $AC=b$ ir α — kampas tarp trikampio kraštinių AB ir AC. Tada

$$S=\frac{bc\sin\alpha}{2}\leqslant\frac{bc}{2}.$$

Bet $bc\leqslant\frac{b^2+c^2}{2}$, todėl

$$S\leqslant\frac{b^2+c^2}{4}.$$

53.1. Iš sąlygos aišku, kad skaičius $(n+1)^2$ baigiasi skaitmeniu 5 ir, būdamas natūraliojo skaičiaus kvadratas, baigiasi 25. Vadinasi, n^2+2n baigiasi 24 ir jo priešpaskutinis skaitmuo yra 2.

53.2. Nubrėžkime aukštinę CD. Tada $\angle DCA=30°$, $DA=\frac{b}{2}$, $DB=$

$$=c-\frac{b}{2},\quad \cos B=\frac{c-\frac{b}{2}}{a}=\frac{2c-b}{2a}.$$

Ši $\cos B$ reikšmė lygi duotai sąlygoje. Todėl $a^2=c^2-ab-\frac{1}{2}bc+$ $+\frac{1}{2}ac$. Bet $a^2=b^2+c^2-bc$ (pagal kosinusų teoremą). Todėl

$$\left(c^2-ab-\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}ac=b^2+c^2-bc\right)\Rightarrow\left((a+b)(c-2b)=0\right).$$

Iš čia: $c=2b$. Vadinasi, $a=b\sqrt{3}$, $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Taigi $\angle B=30°$, $\angle C=90°$.

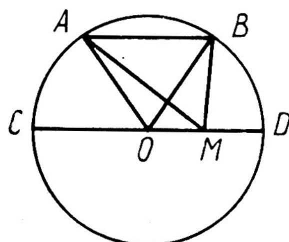
54.1. Randame reiškinio apibrėžimo sritį:

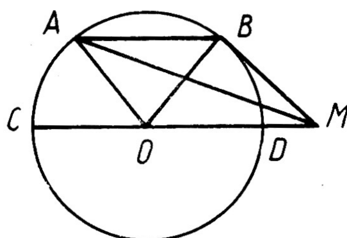
$$2x+6y-x^2-y^2-10\geqslant 0,$$
$$x^2-2x+1+y^2-6y+9\leqslant 0,$$
$$(x-1)^2+(y-3)^2\leqslant 0,$$
$$\begin{cases} x-1=0, \\ y-3=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=1, \\ y=3. \end{cases}$$

Ieškoma aibė yra taškas, kurio koordinatės (1; 3).

54.2. O — apskritimo centras.

Taikydami kosinusų teoremą trikampiams BOM ir AOM (106 pav.), gauname:





106 pav.

$$BM^2=R^2+OM^2-2R\cdot OM\cos\angle BOM,$$
$$AM^2=R^2+OM^2+2R\cdot OM\cos\angle BOM.$$

Šias lygybes sudėję panariui, gauname:

$$BM^2+AB^2=2(R^2+OM^2).$$

55.1. Remsimės skaičiaus dalumo iš 11 požymiu. Skaičius dalijasi iš 11, kai skirtumas S_1-S_2 dalijasi iš 11; čia S_1 — skaičiaus nelyginėse vietose esančių skaitmenų suma, S_2 — lyginėse jo vietose esančių skaitmenų suma.

Pagal uždavinio sąlygą: didžiausias skirtumas $S_1-S_2=(4+$ $+5+6)-(1+2+3)=9$. Vadinasi, sudarytas skaičius galėtų dalytis iš 11 tik tuo atveju, kai $S_1-S_2=0$. Bet tai neįmanoma, nes $S_1+S_2=21$ — nelyginis skaičius.

A t s a k y m a s: negalima.

55.2. Pažymime $AC=CB=a$, $CD=d$, $AD=m$, $DB=n$. Nubrėžiame $CN\perp AB$ (N priklauso atkarpai AB). Tada $NB=AN=\frac{m+n}{2}$, $DN=\frac{|n-m|}{2}$.

Iš stačiųjų trikampių ACN ir DCN:

$$CN^2=a^2-\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 \text{ ir } CN^2=d^2-\left(\frac{n-m}{2}\right)^2.$$

Vadinasi, $d^2=a^2-mn$.

56.1. Kad ir koks būtų $n \geqslant 10$, visuomet $n^{n-2} \geqslant 10^{n-2}$ ir 10^{n-2} yra $(n-1)$-ženklis skaičius. Vadinasi, kad n^{n-2} būtų $(n-2)$-ženklis, n turi būti ne didesnis už 9. Tikrindami įsitikiname, kad uždavinio sąlygą atitinka tik skaičiai $3 \leqslant n \leqslant 9$.

56.2. Iš trikampio ABD pagal kosinusų teoremą:

$$c^2 = m^2 + d^2 - 2md \cos \angle ADB. \quad (1)$$

Iš trikampio ADC pagal kosinusų teoremą:

$$b^2 = n^2 + d^2 - 2nd \cos \angle ADC = n^2 + d^2 - 2nd \cos(180° - \angle ADB).$$

Taigi

$$b^2 = n^2 + d^2 + 2nd \cos \angle ADB. \quad (2)$$

(1) lygybės abi puses padauginame iš n, (2) lygybės — iš m ir gautas lygybes sudedame:

$$c^2n + b^2m = m^2n + n^2m + d^2n + d^2m,$$

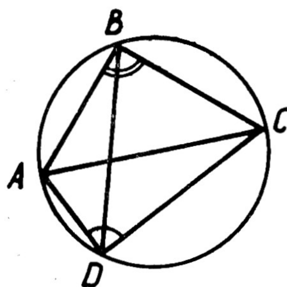
$$c^2n + b^2m = mn(m+n) + d^2(m+n).$$

Kadangi $m + n = a$, tai

$$ad^2 = b^2m + c^2n - amn.$$

57.1. 40 likusių monetų padalykime per pusę ir po 20 jų padėkime į kiekvieną lėkštelę. Kiek gramų vienoje lėkštelėje esančių monetų masė yra mažesnė už kitoje lėkštelėje padėtų monetų masę, tiek netikrų monetų vienoje lėkštelėje yra daugiau negu kitoje. Jei šis skaičius lyginis, tai netikrų monetų abiejose lėkštelėse yra lyginis skaičius. Vadinasi, šiuo atveju iš dėžutės buvo išimta netikra moneta. Jei masių skirtumą rodantis skaičius nelyginis, išimta tikroji moneta.

57.2. Pažymėkime $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = m$, $BD = n$ (107 pav.). Reikia įrodyti: $mn = ac + bd$.



107 pav.

Pažymėkime $\angle ADC = \alpha$ ir taikykime kosinusų teoremą:

$$m^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \alpha;$$

$$-\cos \alpha = \frac{m^2 - c^2 - d^2}{2cd}. \quad (1)$$

Iš trikampio ABC:

$$m^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180° - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha;$$

$$\cos \alpha = \frac{m^2 - a^2 - b^2}{2ab}. \quad (2)$$

Sudėję panariui (1) ir (2) lygybę, gauname:

$$\frac{m^2 - c^2 - d^2}{2cd} + \frac{m^2 - a^2 - b^2}{2ab} = 0.$$

Lygybės abi puses padauginame iš $2abcd$:

$$abm^2 - abc^2 - abd^2 + cdm^2 - a^2cd - b^2cd = 0,$$

$$m^2(ab + cd) = ac(bc + ad) + bd(ad + bc),$$

$$m^2 = \frac{(bc+ad)(ac+bd)}{ab+cd}. \quad (3)$$

Analogiškai gauname:

$$n^2=\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{bc+ad}. \qquad (4)$$

Panariui sudauginame (3) ir (4) lygybę:

$$m^2\cdot n^2=\frac{(bc+ad)(ac+bd)}{ab+cd}\cdot\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{bc+ad}=(ac+bd)^2.$$

Iš čia:

$$mn=ac+bd.$$

58.1. Kelionėje sugaištų dienų skaičių ir nuvažiuotą per dieną atstumą pažymėkime raide t. Pagal sąlygą sudarome lygtį:

$$\frac{t^2}{10}+\left[\frac{t^2}{40}\right]=t+2;$$

čia $\left[\frac{t^2}{40}\right]$ — sveikoji skaičiaus $\frac{t^2}{40}$ dalis, reiškianti poilsio dienų skaičių. Pažymėkime $\left[\frac{t^2}{40}\right]=k\geqslant 0$, tada

$$\frac{t^2}{10}+k=t+2. \text{ Iš čia}$$

$$t^2-10t+(10k-20)=0;$$

$$t=5\pm\sqrt{45-10k};$$

$$45-10k>0, \text{ t. y. } k<\frac{45}{10}.$$

Galimos k reikšmės: 1, 2, 3, 4.
Kadangi t — natūralusis skaičius, tai $k=2$. Vadinasi, $t=10$.
Įdomus toks sudarytos lygties sprendimo būdas:

$$t\left(\frac{t}{10}-1\right)+\left[\frac{t^2}{40}\right]=2.$$

Kai $t>10$, kairioji pusė didesnė už 2, kai $t<10$, mažesnė. Patikrinę įsitikiname, kad $t=10$ yra lygties šaknis.

A t s a k y m a s: 10 dienų.

58.2. Pažymėkime $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$. Trikampio ABC plotas lygus $S=\frac{ab}{2}$. Trikampio pusperimetris $p=(a-r)+(b-r)+r=$ $=a+b-r$.

Iš čia $r=a+b-p=a+b-\frac{a+b+c}{2}=\frac{a+b-c}{2}$.

Be to, $R=\frac{c}{2}$. Tuomet $R+r=\frac{c}{2}+\frac{a+b-c}{2}=\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}=\sqrt{2S}$.

59.1. Pagal skaičiaus sveikosios dalies apibrėžimą

$$\begin{cases}\frac{x-1}{2}\leqslant\frac{x+1}{3}<\frac{x-1}{2}+1,\\ \frac{x-1}{2}\text{ — sveikasis skaičius.}\end{cases}$$

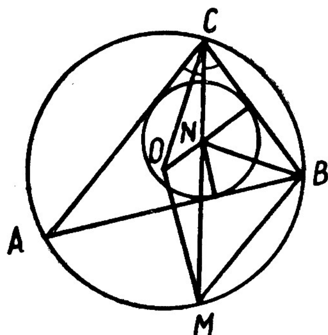
Dvigubos nelygybės sprendimas pakeičiamas nelygybių sistemos sprendimu:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} \leqslant \frac{x+1}{3}, \\ \frac{x+1}{3} < \frac{x-1}{2} + 1. \end{cases}$$

Šios sistemos sprendinių intervalas yra $(-1; 5]$. Iš jo išrenkame tokias x reikšmes, su kuriomis $\frac{x-1}{2}$ — sveikasis skaičius: 1; 3; 5.

A t s a k y m a s: 1, 3, 5.

59.2. Apie trikampį ABC apibrėžto ir į jį įbrėžto apskritimų centrai yra atitinkamai taškai O ir N, CM — kampo C pusiaukampinės atkarpa, kai taškas M priklauso apibrėžtiniam apskritimui (108 pav.).



108 pav.

Iš trikampio MOC sužinome, kad $d^2 = R^2 - CN \cdot NM$ (remiamės IX—X klasės 55.2 uždaviniu). Iš trikampio MNB gauname:

$$\angle MNB = \angle MBN = \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2}.$$

Tada $MN = MB$, bet $MB = 2R \sin \frac{C}{2}$.

Kadangi $CN = \frac{r}{\sin \frac{C}{2}}$, tai $d^2 = R^2 - 2Rr$.

60.1. Kadangi $x - [x] \neq 0$ (žinome iš sąlygos), tai

$$25x^2 = x - [x].$$

Bet $x - [x] = \{x\}$. Taigi

$$25x^2 = \{x\}.$$

Žinome, kad $0 \leqslant \{x\} < 1$, tada

$$0 \leqslant 25x^2 < 1,$$

$$0 \leqslant x^2 < \frac{1}{25},$$

$$-\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5}.$$

Taigi $[x] = 0$ arba $[x] = -1$.

Kai $[x] = 0$, tai

$$[x] = x - 25x^2,$$
$$0 = x - 25x^2,$$
$$x(25x - 1) = 0,$$
$$x = 0 \text{ arba } x = \frac{1}{25}.$$

Tačiau $x=0$ netenkina sąlygoje pateiktos lygties.

Kai $[x]=-1$, tai

$$x-25x^2=-1,$$
$$25x^2-x-1=0,$$
$$x=\frac{1+\sqrt{101}}{50} \text{ arba } x=\frac{1-\sqrt{101}}{50}.$$

Savaime aišku, kad $\frac{1+\sqrt{101}}{50}$ netinka, nes jo sveikoji dalis nelygi -1. Antroji reikšmė yra sąlygoje pateiktos lygties sprendinys. Tuo įsitikiname tikrindami.

Atsakymas: $\frac{1}{25}$, $\frac{1-\sqrt{101}}{50}$.

60.2. Žinome, kad $S=pr$; čia S — trikampio plotas. Taikome Herono formulę:
$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$. Iš čia
$r^2=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$.

Remiamės trijų neneigiamųjų skaičių aritmetinio ir geometrinio vidurkių savybe (žr. IX—X klasės 32.1 uždavinį):

$$(p-a)(p-b)(p-c)\leqslant\left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3=\frac{p^3}{27}.$$

Iš čia $r^2\leqslant\frac{p^2}{27}$, arba $r\leqslant\frac{p}{3\sqrt{3}}$. Vadinasi, $S=pr\leqslant\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$.

DALYKINĖ RODYKLĖ

19. Skaičiaus paskutinio skaitmens nustatymas:
V—VI klasė 26.2, 78.2, 80.2, 82.2;
VII—VIII klasė 17.2, 18.1, 65.1, 87.2;
IX—X klasė 11.1, 53.1.

20. Skaičiaus skaitmenų išbraukymas, prirašymas, keitimas vietomis arba rašymas atvirkščia tvarka:
V—VI klasė 20.2, 31.2, 32.2, 62.2, 73.2, 83.1, 84.1;
VII—VIII klasė 8.2, 14.2, 38.2, 42.1, 60.1, 61.1, 65.1, 80.1, 98.1, 102.1;
IX—X klasė 8.1, 18.1, 28.1.

21. Skaičių sekos sudarymo arba lentelių užpildymo taisyklės:
V—VI klasė 5.2, 6.2, 7.2, 8.2, 9.2, 10.2, 14.2, 19.2, 21.2, 95.1;
VII—VIII klasė 22.2.

22. Sveikoji ir trupmeninė skaičiaus dalys:
IX—X klasė 58.1, 59.1, 60.1.

23. Šifruotės uždaviniai (žvaigždučių arba raidžių keitimas skaitmenimis):
V—VI klasė 3.2, 24.2, 38.2, 40.2, 51.2, 52.2, 53.2, 56.2, 61.2;
VII—VIII klasė 48.2, 58.2, 60.2, 63.2, 74.2, 75.2, 76.2, 77.2, 93.1;
IX—X klasė 4.1, 46.1, 47.1.

24. Tapatybės:
VII—VIII klasė 27.2, 41.2, 57.2, 59.2, 67.1, 71.1, 73.1, 84.2;
IX—X klasė 23.1.

25. Tekstiniai (aritmetiniai, lygčių arba reiškinių sudarymo) uždaviniai:
V—VI klasė 2.1, 3.1, 5.1, 12.1, 18.1, 20.1, 23.1, 25.1, 26.1, 30.1, 31.1, 32.1, 34.2, 35.1, 36.1, 38.1, 39.1, 40.1, 41.1, 43.1, 43.2, 44.1, 44.2, 45.1, 45.2, 46.1, 46.2, 47.1, 49.1, 50.1, 51.1, 52.1, 53.1, 54.1, 55.1, 59.1, 60.1, 61.1, 63.1, 63.2, 65.1, 66.1, 67.1, 68.1, 70.1, 71.1, 75.1, 77.1, 78.1, 79.1, 80.1, 81.1, 85.2, 89.1, 90.1, 94.1, 100.1;
VII—VIII klasė 3.1, 4.1, 7.1, 9.1, 10.1, 11.1, 14.1, 15.2, 16.1, 32.1, 41.1, 56.1, 57.1, 62.1, 63.1, 86.1, 87.1, 88.1, 89.1, 94.1.

26. Uždaviniai:
a) apie kalendorių
V—VI klasė 9.1, 10.1, 11.1;
b) apie monetas
V—VI klasė 27.1, 28.1, 29.2, 33.2, 74.2;
VII—VIII klasė 91.1;
c) apie turnyrą
V—VI klasė 87.1, 88.1;
VII—VIII klasė 28.1, 55.1;
d) apie vidutinę kainą, vidutinį greitį
V—VI klasė 82.1, 96.2, 97.1, 98.1, 99.1;
VII—VIII klasė 15.1;
e) skysčių pilstymo į indus
V—VI klasė 16.1, 17.1, 60.2;
f) sprendžiami perrankos metodu
V—VI klasė 15.1, 22.1, 56.1, 92.1;
VII—VIII klasė 3.2, 30.1, 58.1, 66.1, 75.2;
IX—X klasė 1.1, 3.1, 6.1, 40.1, 56.1;

PANAUDOTA LITERATŪRA

1. Olimpiadinis matematikos uždavinynas. Sud. J. Kubilius. 1972.
2. Žurnalai «Квант» ir «Математика в школе».
3. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. М., 1975.
4. Бартенев Ф. А. Нестандартные задачи по алгебре. М., 1976.
5. Внеклассная работа по математике в 4—5 классах. Под редакцией С. И. Шварцбурда. М., 1974.
6. Зубелевич Г. И. Сборник задач московских математических олимпиад (с решениями). М., 1971.
7. Дынкин Е. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л., Толпыго А. К. Математические задачи. М., 1971.
8. Кречмар В. Задачник по алгебре. М., 1972.
9. Сборник задач по алгебре для 6—8 классов. Пособие для учителей. М., 1975.
10. Сборник задач по геометрии для 6—8 классов. М., 1979.
11. Сивашинский И. Х. Задачи по математике для внеклассных занятий (9—10 классы). М., 1968.
12. Тригг Ч. Задачи с изюминкой. М., 1975.

TURINYS

Vladas **Vitkus**
JAUNAJAM MATEMATIKUI
Uždavinynas V—X klasei

Redaktorė *N. Ramanauskienė*
Viršelis *A. Didžgalvienės*

SL 259. 1993 12 20. 10,14 leidyb. apsk. l. Tir. 5000 egz.
Leid. Nr. 12533. Užsak. Nr. 4424.
Valstybinė „Šviesos“ leidykla, Vytauto pr. 25, 3000 Kaunas.
Valstybinė „Aušros“ spaustuvė, Vytauto pr. 23, 3000 Kaunas.
Sutartinė kaina

Vitkus V.

Vi-336 Jaunajam matematikui: Uždavinynas V—X klasei. — K.: Šviesa, 1994. — 173 p., iliustr.

ISBN 5-430-01586-5

Tai to paties autoriaus tuo pačiu pavadinimu 1981 m. išleisto uždavinyno antrasis, perdirbtas, leidimas. Jame ištaisyti pirmojo leidimo netikslumai, pateikti išsamesni, racionalesni daugelio uždavinių sprendimai, kai kurie uždaviniai pakeisti naujais, atsisakyta dabar mokykloje nevartojamų matematinių simbolių.

Uždavinynas skiriamas mokytojams, rengiantiems jaunųjų matematikų olimpiadų dalyvius, dirbantiems su matematikos būrelių nariais, pajėgesniais mokiniais per pamokas.

UDK 51(075.3)